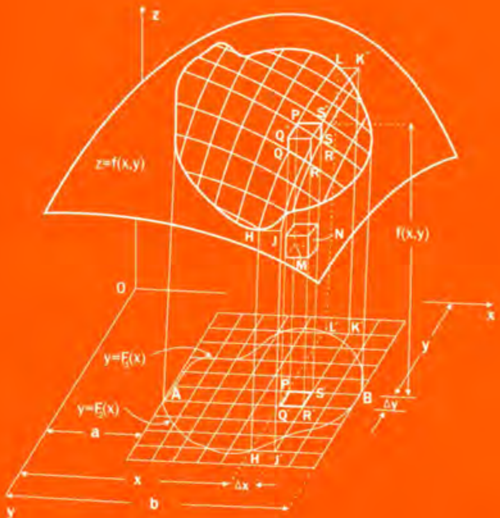
Prof. Ahmet A. KARADENİZ

yüksek matematik problemleri



545 ÇÖZÜMLÜ 1380 PROBLEM

Çağlayan Kitabevi
Beyoğlu - İSTANBUL

Onikinci Baskı
2011

ISBN: 978-975-436-064-6

Baskı ve Cilt:
Avcı Ofset Matbaacılık
Davutpaşa Cad. İpek İş Merkezi No:6/13
Zeytinburnu - İstanbul

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ KISIM

FORMÜLLER, TANIMLAR, KURALLAR, TEOREMLER

İKİNCİ KISIM

PROBLEMLER

BİRİNCİ KISIM

Formüller
Tanımlar
Kurallar
Teoremler

1. CEBİR

1. BAŞLICA KANUNLAR.

Komütatiflik kanunu : $a+b=b+a \quad , \quad ab=ba$

Asosiyatiflik kanunu : $a+(b+c)=(a+b)+c \quad ; \quad a(bc)=(ab)c$

Distribütiflik kanunu : $a(b+c)=ab+ac$

2. KUVVET KANUNLARI.

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad ; \quad (ab)^x = a^x b^x \quad ; \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a \neq 0 \text{ olarak, } a^0 = 1 \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad ; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x} \quad ; \quad a^{\frac{1}{y}} = \sqrt[y]{a}$$

3. SIFIRLA İŞLEMLER.

$$a-a=0 \quad , \quad a \times 0 = 0 \times a = 0$$

$a \neq 0$ olarak, $\frac{0}{a}=0$, $0^a=0$, $a^0=1$ (sıfıra bölme imkânsızdır).

4. KOMPLEKS SAYILAR.

a ve b reel sayılar olarak $a+bi$ şeklindeki bir sayı kompleks sayıdır.

$$i=\sqrt{-1} \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i \quad , \quad i^4=1 \quad , \quad i^{4n+m}=i^m$$

$a+bi=c+di$ olması için $a=c$, $b=d$ olması gerek ve yeterdir.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ ve $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ olarak:

$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$ dir.

5. LOGARİTMA KANUNLARI.

A, B, a pozitif sayılar ve $a \neq 1$ ise.

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B \quad , \quad \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

$$\log_a A^n = n \log_a A \quad , \quad \log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A \; , \; \log_a \frac{1}{A} = -\log_a A$$

$$\log_a a = 1 \quad , \quad \log_a 1 = 0 \quad , \quad \log_a A = \log_b A \log_a b = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

6. BİNOM TEOREMİ.

n pozitif bir sayı ve $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$ olarak:

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1} b^{r-1} + \cdots\cdots + n\,a\,b^{n-1} + b^n$$

7. BAŞLICA ÖZDEŞLİKLER.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots\cdots + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2} b + \cdots\cdots - b^{n-1}) \quad (n \text{ çift ise})$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2} b + \cdots\cdots + b^{n-1}) \quad (n \text{ tek ise})$$

$$a^4 + a^2 b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

8. ORAN VE ORANTI.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ise } ad = bc \quad , \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ dir.}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots\cdots = k \text{ ise } k = \frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots} = \frac{pa+qc+re+\cdots\cdots}{pb+qd+rf+\cdots\cdots}$$

dir.

9. ARİTMETİK DİZİ.

$$a \ , \ a+r \ , \ a+2r \ , \ a+3r, \ldots\ldots$$

a: birinci terim, r: ortak fark, n: terim sayısı, l: son terim ve S: ilk n terimin toplamını göstermek üzere:

$$l = a + (n-1)r \quad , \quad S = \frac{n}{2}(a+l)$$

dir. a ve b sayılarının *aritmetik ortalaması* $\frac{a+b}{2}$ dir.

10. GEOMETRİK DİZİ.

$$a \ , \ aq \ , \ aq^2 \ , \ aq^3, \ldots\ldots$$

a: ilk terim, q: ortak çarpan, n: terim sayısı, l: son terim ve S_n: ilk n terimin toplamı ise:

$$l = a\,q^{n-1} \quad , \quad S_n = a\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{ql-a}{q-1}$$

dir. $q^2 < 1$ halinde n sonsuz olarak arttığı zaman S_n in limiti:

$$S = \frac{a}{1-q}$$

dir. a ve b sayılarının *geometrik ortalaması* $\sqrt{ab}$ dir.

11. HARMONİK DİZİ.

Bir aritmetik dizinin terimlerinin terslerinin teşkil ettiği diziye *harmonik dizi* denir. Bu da:

$$\frac{1}{a} \ , \ \frac{1}{a+r} \ , \ \frac{1}{a+2r} \ , \ldots\ldots$$

şeklindedir. a ve b sayılarının *harmonik ortalaması* $\frac{2ab}{a+b}$ dir.

12. PERMÜTASYONLAR.

n tane şeyin (eleman) muhtelif şekilde sıralanmalarının herbirine *permütasyon* denir. Birbirinden farklı n şeyin r tanesi alınıp muhtelif şekilde sıralanabilir. n tane şeyin r lik permütasyonlarının toplam sayısı:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

dir. n tane şeyin hepsinin birden alınmasiyle elde edilecek permütasyonlarının sayısı, yukarıdaki ifadede $r = n$ alınarak

$$P_n^r = n(n-1)(n-2) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

dir.

13. KOMBİNEZON.

n tane şeyden, sıralama göz önüne alınmadan, r tanesinin toplu bir halde alınmasile elde edilen guruba n şeyin bir *kombinezonu* denir. n tane şeyden her defasında r tane almakla elde edilen bütün kombinezonların sayısı:

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

dır.

14. İHTİMAL.

Bir olayın meydana gelmesine uyan haller sayısının, mümkün olan bütün haller sayısına oranına *ihtimal* denir. Olayın meydana gelmesine uyan haller sayısı p ve mümkün olan haller sayısı da q ise ihtimal p/q dür.

15. KALAN TEOREMİ.

Bir $f(x)$ çokterimlisinin $x - a$ ya bölümünden elde edilen kalan $f(a)$ ya eşittir. $f(a) = 0$ ise $f(x)$ çokterimlisi $x - a$ ya bölünebiliyor demektir.

16. DETERMİNANTLAR.

n. mertebeden bir D determinantı:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

şeklinde olup:

$$\sum(\pm)\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \cdots a_{nl}$$

toplamı ile tanımlıdır. Burada $n!$ terim mevcuttur.

a_{ij} elemanının A_{ij} çarpanı, D determinantında (i) yinci satırla (j) yinci sütunun kaldırılması suretile elde edilen determinantın $(-1)^{i+j}$ ile çarpımına eşittir. A_{ij} ye a_{ij} elemanının eşçarpanı denir.

Determinantlar için şu teoremler söylenebilir:

1. Bir determinantda satırlarla sütunlar yer değiştirirse determinant değişmez.

2. Bir determinantda iki satır veya sütun aralarında yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

3. İki satır veya sütunu birbirinin ayni olan bir determinant sıfıra eşittir.

4. Bir determinantda bir satır veya sütunun elemanları m gibi bir sayı ile çarpılırsa determinantın değeri de bu sayı ile çarpılmış olur.

5. Bir determinantda bir satır veya bir sütunun bütün elemanları bir m sayısı ile çarpıldıktan sonra, diğer bir satır veya sütunun karşılık elemanlarına ilâve edilirse determinantın değeri değişmez.

6. $D = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots\ldots + a_{nj} A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$

7. $j \neq k$ *olarak*: $a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \ldots\ldots + a_{nj} A_{nk} = 0$ *dır.*

8. $i = 1, 2, \ldots, n$ *ve* $D \neq 0$ *olarak:*

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots\ldots + a_{in} x_n = c_i$$

denklem sisteminin bir tek çözümü vardır ve:

$$D x_1 = \Delta_1 \quad , \quad D x_2 = \Delta_2 \, , \ldots , D x_n = \Delta_n$$

dir. Δ_k, D *determinantında* (k) *yıncı sütundaki elemanlar yerine* $c_1, c_2 \ldots\ldots, c_n$ *leri yazmak suretile elde edilen determinantdır.*

Örnek 1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} (a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{12} (a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}) + a_{13} (a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22})$$

Örnek 2. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -7 \\ 5x - 2y - z &= 1 \\ 4x + 3y + z &= 11 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{80}{80} = 1 \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{240}{80} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-160}{80} = -2$$

17. İKİNCİ DERECE DENKLEMİ.

$a \neq 0$ olarak $ax^2 + bx + c = 0$ ise $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dır.

a , b , c reel sayılar olarak:

$b^2 - 4ac > 0$ ise iki gerçel kök vardır.

$b^2 - 4ac = 0$ ise iki katlı bir gerçel kök vardır.

$b^2 - 4ac < 0$ ise iki eşlenik kompleks kök vardır.

18. ÜÇÜNCÜ DERECE DENKLEMİ.

$y^3 + py^2 + qy + r = 0$ denklemi $y = x - \dfrac{p}{3}$ dönüştürmesi yapılarak:

$$x^3 + ax + b = 0$$

şekline sokulur. Burada:

$$a = \frac{1}{3}(3q - p^2) \quad , \quad b = \frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r)$$

dir. x_1 , x_2 , x_3 çözümleri:

$$i^2 = -1\,,\ \mathrm{A} = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\,,\ \mathrm{B} = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

olarak:

$$x_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}\ ;\ x_2\,,\ x_3 = -\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

dir.

$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} > 0$ ise bir gerçel ve iki eşlenik kompleks kök;

$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = 0$ ise ikisi eşit üç gerçel kök;

$\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0$ ise üç farklı gerçel kök vardır.

19. *n*. DERECEDEN GENEL DENKLEM.

$$\mathrm{P} \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$n > 4$ ise bu denklemin köklerini veren bir formül bulunamaz. Bu halde aşağıdaki metodlar kullanılır:

1. Çarpanlara ayırarak kök bulma: Denklemi sağlıyan yani

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

olan bir r sayısı bulunuz. Bu takdirde $x - r$, P nin bir çarpanıdır. P yi $x - r$ e bölerek elde edilen denklem P den bir derece aşağı derecededir. Bu suretle elde edilen denkleme de ayni metod uygulanarak denklemin kökleri bulunabilir. P=0 ın bütün kökleri $\frac{a_n}{a_0}$ ın bölenleridir.

2. Köklerin yaklaşık olarak hesaplanması: $x = a$ ve $x = b$ için P değişik işaretlerde değer alıyorsa a ile b arasında denklemin bir kökü vardır. Bu yoldan hareket edilerek kökler istenilen yaklaşıklıkta bulunabilir.

3. Grafik metodla kök bulma: P fonksiyonunun gösterdiği eğrinin ox eksenini kestiği noktaların x apsisleri P = 0 denkleminin gerçel kökleridir. Eğrinin, kök civarındaki kısmı daha büyük ölçekte çizilerek kök, mümkün olan yaklaşıkta bulunabilir.

20. $x^n = a$ **DENKLEMİNİN KÖKLERİ.**

Bu denklemin n kökü vardır.

$$a > 0 \quad \text{ise} \quad x = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$a < 0 \quad \text{ise} \quad x = \sqrt[n]{-a}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

dir. Burada, k ya $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ değerleri verilecektir.

2. GEOMETRİ

a, b, c, s ile uzunlukları, F ile alanları ve V ile hacımları gösterelim.

1. ÜÇGEN. Tabanı a, yüksekliği h olarak alan: $F = ah/2$ dır.

2. DİK DÖRTGEN. Kenarlarının uzunlukları a ve b olduğuna göre alanı $F = ab$ dir.

3. PARALELKENAR. Kenarlarının uzunlukları a, b, yüksekliği h ve iki kenarı arasındaki açı θ olduğuna göre alanı $F = ah = ab \sin\theta$ dir.

4. YAMUK. Paralel kenarları a, b ve yüksekliği h olduğuna göre alanı: $F = \frac{1}{2} h(a+b)$ dir.

5. n KENARLI DÜZGÜN ÇOKGEN.

Bir kenarının uzunluğu a ise alan: $F = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}$

Dışına çizilen dairenin yarı çapı $R = \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$

İçine çizilen dairenin yarı çapı $r = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}$

$\alpha = \frac{2\pi}{n}$ olarak: $a = 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ dır.

6. DAİRE. (Şekil 1)

c = çevre — $s = \theta$ merkez açısına karşılık yay uzunluğu

R = yarıçap — $l = s$ yay uzunluğuna karşılık kirişin uzunluğu

D = çap — h = ok uzunluğu

F = Alan — θ = merkez açısı (radyan cinsinden)

ise:

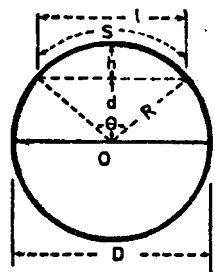
$c = 2\pi R = \pi D \qquad \pi = 3{,}14159\ldots$

$s = R\theta = \frac{1}{2} D\theta = D \text{ Arc cos } \frac{d}{R}$

$l = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2R \sin\frac{\theta}{2} = 2d \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

$d = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l^2} = R\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\, l \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$

$h = R - d$



Şekil 1

$\theta = \frac{s}{R} = \frac{2s}{D} = 2 \text{ Arccos}\frac{d}{R} = 2 \text{ Arctg}\frac{l}{2d} = 2 \text{ Arc sin}\frac{l}{D}$

Dairenin alanı : $F = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$

Daire kesmesinin alanı : $F = \frac{1}{2} Rs = \frac{1}{2} R^2 \theta$

Daire parçasının alanı : F = daire kesmesi alanı — üçgen alanı

$= \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin\theta)$

$= R^2 \text{ Arccos}\frac{R-h}{R} - (R-h)\sqrt{2Rh - h^2}$

Daire içine çizilmiş n kenarlı bir düzgün çokgenin çevresi :

$= 2nR \sin\frac{\pi}{n}$

Daire içine çizilmiş n kenarlı bir düzgün çokgenin alanı :

$= \frac{1}{2}\, n R^2 \sin\frac{2\pi}{n}$

Kenarları daireye teğet olan n kenarlı bir düzgün çokgenin çevresi :

$= 2nR \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$

Kenarları daireye teğet olan n kenarlı bir düzgün çokgenin alanı :

$= nR^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$

Kenarları a, b, c olan bir üçgenin içine çizilmiş olan dairenin yarıçapı:

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad \text{olarak:} \quad r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Üçgenin dışına çizilmiş olan dairenin yarı çapı:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

dir.

7. ELİPS. Asal ve yedek eksenlerin yarı uzunlukları a ve b olduğuna göre alanı $F = \pi ab$ dir.

8. YAKLAŞIK ALAN HESABI. Düzlem bir şeklin birbirinden h kadar uzaklıktaki paralel kirişlerinin uzunlukları $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ise bu şeklin alanının yaklaşık değeri:

$$F = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] \quad \text{(yamuk metodu)}$$

$$F = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

(n çift, simpson metodu)

9. KÜP. Bir kenarının uzunluğu a ve köşegeninin uzunluğu d ise:

$$V = a^3; \quad d = \sqrt{3}\,a; \quad \text{Alan} = F = 6a^2 \quad \text{dir.}$$

10. DİKDÖRTGENLER PİRİZMASI. Kenarlarının uzunlukları a, b, c ve köşegenin uzunluğu d olduğuna göre:

$$V = abc; \quad d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}; \quad F = 2(ab+bc+ca) \quad \text{dır.}$$

11. PİRİZMA VEYA SİLİNDİR.

V = Taban alanı × yükseklik

Yanal yüzün alanı = Dik kesit çevresi × yanal kenar

12. PİRAMİT VEYA KONİ.

$$V = \frac{1}{3} \times \text{taban alanı} \times \text{yükseklik}$$

$$\text{Yanal yüzün alanı} = \frac{1}{2} \times \text{taban çevresi} \times \text{yanal yükseklik}$$

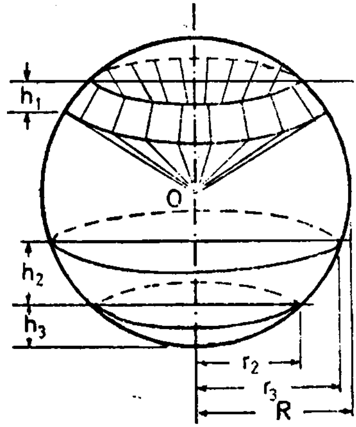
13. KESİK PİRAMİT VEYA KESİK KONİ. A_1, A_2 tabanlarının alanları ve h yükseklik olduğuna göre :

$$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1A_2})$$

Yanal yüzün alanı =

$\frac{1}{2} \times$ taban çevresi $\times$ yanal yükseklik

14. KÜRE. (Şekil 2).



Şekil 2

Kürenin alanı : $F = 4\pi R^2 = \pi D^2$

Küre kuşağı alanı : $F = 2\pi R h_1 = \pi D h_1$

Küre hacmı : $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$

Küre kesmesi hacmı : $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1 = \frac{1}{6}\pi D^2 h_1$

Bir tabanlı küre parçası hacmı : $V = \frac{1}{6}\pi h_3 (3r_3^2 + h_3^2)$

İki tabanlı küre parçası hacmı : $V = \frac{1}{6}\pi h_2 (3r_3^2 + 3r_2^2 + h_2^2)$

3. TRİGONOMETRİ

1. AÇI BİRİMLERİ. Bir dik açının $\frac{1}{90}$ ı bir *derece*dir. Bir dairede, yarıçapa eşit uzunluktaki bir yayı gören merkez açısı 1 *radyan*dır.

$$180° = \pi \text{ radyan}, \quad 1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745 \text{ radyan},$$

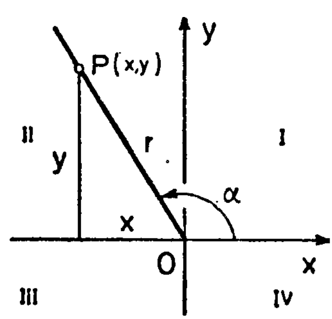
$$1 \text{ radyan} = \frac{180}{\pi} = 57° 17' 44''$$

2. BİR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI. α, bir kenarı ox ekseni üzerinde ve tepesi orijinde olan bir açı olsun. Bu açının diğer kenarı da $P(x,y)$ noktasını orijine birleştiren doğru olsun. r de P nin O ya olan uzaklığı olsun. $(r>0)$ Şekil 3. Bunlara göre α açısının *trigonometrik fonksiyonları* şu şekilde tanımlanır:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y}$$



Şekil 3

3. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İŞARETLERİ.

Bölge	sin	cos	tg	cotg
I	+	+	+	+
II	+	—	—	—
III	—	—	+	+
IV	—	+	—	—

4. BAZI AÇILARIN TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
cotg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

5. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN DEĞİŞİMLERİ.

Bölge	sin	cos	tg	cotg
I	$0 \to +1$	$+1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$+\infty \to 0$
II	$+1 \to 0$	$0 \to -1$	$-\infty \to 0$	$0 \to -\infty$
III	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to +\infty$	$+\infty \to 0$
IV	$-1 \to 0$	$0 \to +1$	$-\infty \to 0$	$0 \to -\infty$

6. HERHANGİBİR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARINI BİR DAR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI CİNSİNDEN İFADE ETMEK.

$\sin(360°k+\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(360°k+\alpha) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,(360°k+\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{cotg}(360°k+\alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$

$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,(180°-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{cotg}(180°-\alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$

$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,(180°+\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{cotg}(180°+\alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha$

$\sin(360°-\alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(360°-\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,(360°-\alpha) = \mathrm{tg}\,(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

$\mathrm{cotg}(360°-\alpha) = \mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$
$\operatorname{tg}(270° - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}(270° + \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$
$\operatorname{cotg}(270° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

7. BAŞLICA ÖZDEŞLİKLER.

$$\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \quad ; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin n\alpha = 2\sin(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-2)\alpha$$

$$\cos n\alpha = 2\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \cos(n-2)\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad , \quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1-\cos\alpha$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad , \quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha \quad , \quad 2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha) \quad , \quad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

8. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN, BUNLARDAN BİRİ CİNSİNDEN İFADELERİ.

fonk.	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{cotg}\alpha$

9. TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

$x = \sin y$ eşitliğini sağlıyan y çözümleri :

$$y = 2k\pi + \text{Arcsin}\, x \quad \text{ve} \quad y = (2k+1)\pi - \text{Arcsin}\, x$$

eşitlikleri ile verilmiştir. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arcsin}\, x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ olup bu değerler herhangibir $\arcsin x$ fonksiyonunun *asal değerler*idir.

Ayni şekilde $0 \leqslant \text{Arccos}\, x \leqslant \pi$ olarak $\arccos x = 2k\pi \pm \text{Arccos}\, x$ dir. $(0,\pi)$ aralığındaki değerler $\arccos x$ in asal değerleridir.

$-\frac{\pi}{2} < \text{Arctg}\, x < +\frac{\pi}{2}$ olarak $\text{arctg}\, x = \text{Arctg}\, x + k\pi$ dir. $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki değerler $\text{arctg}\, x$ in asal değerleridir.

10. ÜÇGENLERİN KENAR VE AÇILARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR.

Üçgenin kenarları a, b, c ve açıları α, β, γ olsun. $2p = a + b + c$, F = Alan , h = yükseklik, r üçgenin içine çizilen dairenin yarıçapı, R, üçgenin dışına çizilen dairenin yarıçapı olarak (şekil 4):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

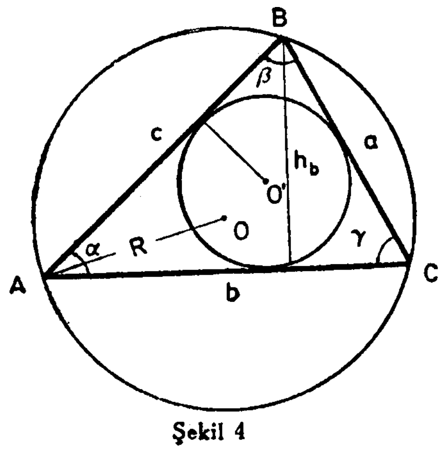
(Sinüs teoremi)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{\text{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(Kosinüs teoremi)

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$



Şekil 4

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad \sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{r}{p-a}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$F = \frac{1}{2}\, b\, h_b = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp$$

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a\,b\,c}{4F}\,, \qquad h_b = c\sin\alpha = a\sin\gamma = \frac{2pr}{b}$$

4. HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

1. TANIMLARI.

Sinüs hiperbolik $x = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Kosinüs hiperbolik $x = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Tanjant hiperpolik $x = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}, \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

2. TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLAR.

$x = \operatorname{sh} y$ ise y, x in sinüs hiperbolik fonksiyonunun tersi olur ve $y = \operatorname{arg\,sh} x$ şeklinde gösterilir.

$$\operatorname{arg\,sh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\operatorname{arg\,ch} x = \pm \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$\operatorname{arg\,th} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

3. BAŞLICA ÖZDEŞLİKLER.

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{sech}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

$$2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2} = \operatorname{ch} x - 1 \qquad 2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2} = \operatorname{ch} x + 1$$

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \operatorname{ch} \frac{x+y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$$

4. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARLA ARALARINDAKİ BAĞINTILAR.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad i^2 = -1$$

$$\sin x = -i \operatorname{sh} ix, \quad \cos x = \operatorname{ch} ix, \quad \operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix$$

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \cos ix = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{tg} ix = i \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{sh} ix = i \sin x, \quad \operatorname{ch} ix = \cos x, \quad \operatorname{th} ix = i \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{sh}(x \pm iy) = \operatorname{sh} x \cos y \pm i \operatorname{ch} x \sin y$$

$$\operatorname{ch}(x \pm iy) = \operatorname{ch} x \cos y \pm i \operatorname{sh} x \sin y$$

$$\operatorname{sh}(x + 2i\pi) = \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(x + 2i\pi) = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{sh}(x + i\pi) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(x + i\pi) = -\operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{sh}\left(x + \frac{1}{2} i\pi\right) = i \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}\left(x + \frac{1}{2} i\pi\right) = i \operatorname{sh} x$$

$$e^{\varphi} = \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi \qquad e^{-\varphi} = \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi$$

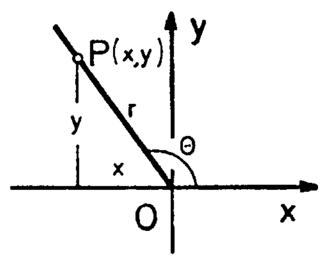
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \qquad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \qquad \text{(Moivre formülü)}$$

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)^n = 1 \qquad k = 0,1,2,\ldots,(n-1).$$

5. ANALİTİK GEOMETRİ

1. KARTEZYEN KOORDİNATLAR. *Orijin* adı verilen bir O noktasında kesişen birbirine dik $x'x$ ve $y'y$ eksenlerini göz önüne alalım. Düzlemdeki bir P noktasının yeri, bu noktanın, oy eksenine uzaklığı olan x (*apsis*) ve ox eksenine uzaklığı olan y *(ordinat)* sayıları ile belirli olur. Bunlarla P noktası, $P(x,y)$ şeklinde gösterilir. x sağ tarafta ise pozitif, sol tarafta ise negatiftir. y ise, yukarı tarafta ise pozitif, aşağı tarafta ise negatiftir (Şekil 5).



Şekil 5

2. KUTUPSAL KOORDİNATLAR. Ox eksenini ve O noktasını göz önüne alalım. Düzlemdeki herhangibir P noktasının yeri, bu noktanın O noktasına olan r uzaklığı ve P yi O ya birleştiren doğrunun Ox ekseni ile teşkil ettiği θ açısı yardımı ile belirtilebilir (Şekil 5). Burada r, *kutupsal ışın*; θ, *kutupsal açı* ; Ox ekseni, *kutupsal eksen* ; O noktası, *kutup* adını alır. r ve θ nın her ikisine birden P noktasının kutupsal koordinatları denir ve P noktası, bunlarla $P(r, \theta)$ şeklinde gösterilir. θ, saat ibrelerinin dönüş yönünün tersinde çizilmiş ise pozitif, aksi halde negatifdir. r pozitif olarak alınır.

3. KARTEZYEN VE KUTUPSAL KOORDİNATLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

4. NOKTALAR VE EĞİMLER. $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ gibi iki nokta verilmiş olsun ve P_1P_2 nin Ox ekseni ile teşkil ettiği açı α olsun. P_1 ve P_2 arasındaki $\overline{P_1P_2}$ uzaklığı (Şekil 6) :

$$\overline{P_1P_2} = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

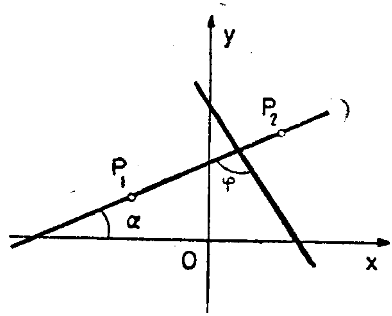
$$\overline{P_1P_2} \text{ nin eğimi} = m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\overline{P_1P_2}$ yi $\frac{m_1}{m_2}$ oranında bölen noktanın koordinatları :

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right);$$

$\overline{P_1P_2}$ nin orta noktasının koordinatları :

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right);$$



Şekil 6

Eğimleri m_1 ve m_2 olan iki doğru arasındaki φ açısı

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

formülü ile verilmiştir. $m_1m_2 = -1$ ise doğrular birbirine dik, $m_1 = m_2$ ise paraleldir.

5. ÜÇGEN ALANI. Köşelerinin koordinatları (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) olan bir üçgenin alanı :

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2)$$

dir.

6. **EĞRİ VE DENKLEMİ.** Verilmiş bir şartı sağlıyan noktaların hepsi birden bu şartın geometrik yerini meydana getirirler. Böyle bir eğrinin üzerindeki noktaların koordinatlarını birbirine bağlıyan bağıntıya *eğrinin denklemi* denir. Bu denklemler şu şekilde gösterilir :

a) Eğri üzerindeki noktaların x ve y kartezyen koordinatları arasındaki, $y = f(x)$ şeklindeki bağıntı, eğrinin *kartezyen denklemi* dir.

b) Eğri üzerindeki noktaların r ve θ kutupsal koordinatları arasındaki $r = f(\theta)$ şeklindeki bağıntı, *eğrinin kutupsal denklemi*dir.

c) Eğri üzerindeki noktaların kartezyen koordinatları parametre adı verilen üçüncü bir t değişkeninin $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ şeklindeki fonksiyonları olarak verilmişlerse, bu bağıntılar, *eğrinin parametrik denklemleri*dir.

7. KOORDİNAT EKSENLERİNİN DÖNÜŞTÜRÜLMESİ.

a) Yeni orijin (h,k) noktasında olacak şekilde paralel kaydırmada:

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

dır. x' ve y' ler (x, y) koordinatlı noktanın yeni eksen takımındaki koordinatlarıdır.

b) Orijin sabit kalmak şartiyle eksenleri θ açısı kadar döndürmede:

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

dır.

c) Yeni orijin (h,k) da ve eksenleri θ açısı kadar döndürmede:

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + h$$
$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + k$$

dır.

8. DOĞRU. Doğrunun muhtelif şekildeki denklemleri aşağıda gösterilmiştir.

m eğim, n oy eksenini kestiği noktanın ordinatı olarak doğrunun denklemi:

$$y = mx + n \ ;$$

(x_1, y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi:

$$y - y_1 = m(x - x_1);$$

(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen doğrunun denklemi:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ ;$$

Koordinat eksenlerini a apsisli ve b ordinatlı noktalarında kesen doğrunun denklemi :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

p orijinin doğruya uzaklığı ve α, normalinin Ox le teşkil ettiği açı olarak, *doğrunun normal şekildeki denklemi* :

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \ ;$$

Doğrunun genel denklemi :

$$Ax + By + C = 0$$

dır. $Ax + By + C = 0$ şeklindeki genel denklemi normal şekle sokmak için denklemin birinci tarafını $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ ye bölmelidir. $\pm$ den C nin işaretinin aksi alınır.

$P(x_1, y_1)$ noktasının $Ax + By + C = 0$ doğrusuna uzaklığı:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

dir.

9. DAİRE. Merkezinin koordinatları (h, k) olan r yarıçaplı bir dairenin genel denklemi:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

dir.

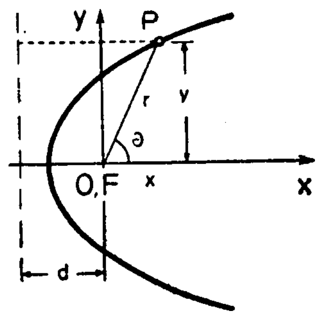
10. KONİK. Odak adı verilen bir F noktasına uzaklığının, doğrultman adı verilen bir doğruya uzaklığına oranı sabit ve e ye (eksentrisite) eşit olan noktaların geometrik yerine konik denir (Şekil 7).

F odağının doğrultmana uzaklığı d ve F odağı orijinde ise:

$$x^2 + y^2 = e^2(d + x)^2$$

veya

$$r = \frac{d\,e}{1 - e \cos \theta}$$



Şekil 7

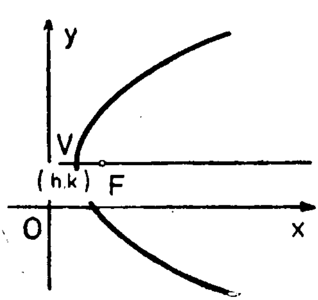
dir. $e = 1$ ise konik, *parabol*; $e > 1$ ise *hiperbol*; $e < 1$ ise *elips*'dir.

11. PARABOL. $e = 1$.

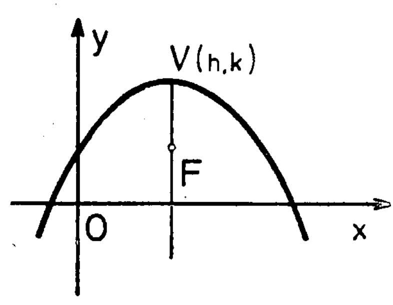
Köşesinin koordinatları (h, k) ve ekseni Ox eksenine paralel olan parabolun denklemi (Şekil 8):

$$(y - k)^2 = 2p\,(x - h)$$

ve köşesinin koordinatları (h, k) ve ekseni Oy eksenine paralel olan parabolun denklemi (Şekil 9):



Şekil 8



Şekil 9

$$(x-h)^2 = 2p(y-k)$$

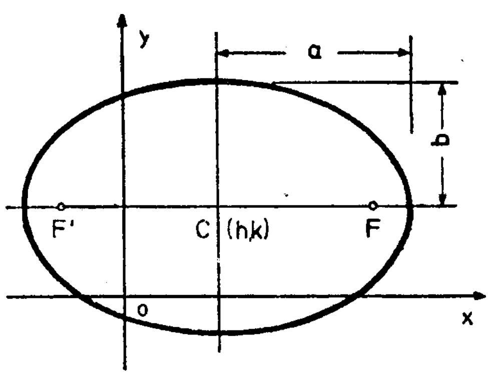
dır. $p/2$ = odak uzaklığı = VF dir.

12. ELİPS. $e < 1$.

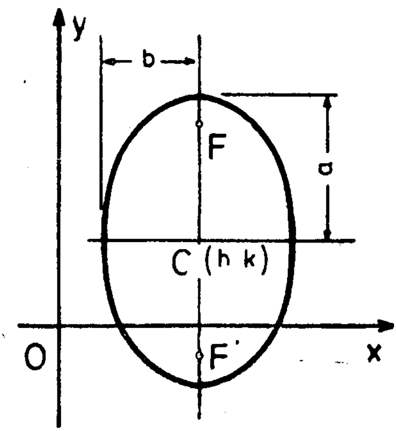
Merkezi (h, k) da ve asal ekseni Ox eksenine paralel elipsin denklemi (Şekil 10):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ve merkezi (h, k) da, asal ekseni Oy eksenine paralel elipsin denklemi (şekil 11):



Şekil 10



Şekil 11

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

dir.

Asal eksen uzunluğu $= 2a$

yedek eksen » $= 2b$

merkezin odağa uzaklığı $= \sqrt{a^2 - b^2}$

eksantrisite $= e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Herhangibir P noktasının odaklara uzaklıkları toplamı:

$$PF' + PF = 2a$$

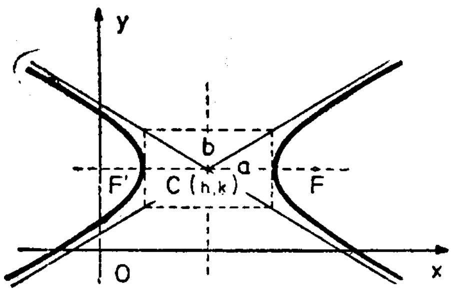
dır.

13. HİPERBOL. $e > 1$

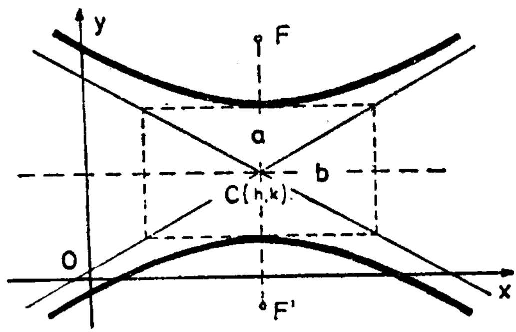
Merkezi (h, k) da ve asal ekseni Ox e paralel olan hiberbolün denklemi (şekil 12):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{asimptodlarının eğimi} = \pm \frac{b}{a}$$



Şekil 12



Şekil 13

Merkezi (h, k) da ve asal ekseni oy eksenine paralel olan hiperbolün denklemi (şekil 13):

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{asimptodlarının eğimi} = \pm \frac{a}{b} \text{ dir.}$$

Asal eksen uzunluğu $= 2a$, yedek eksen uzunluğu $= 2b$

Merkezin odaklara uzaklığı $= \sqrt{a^2+b^2}$

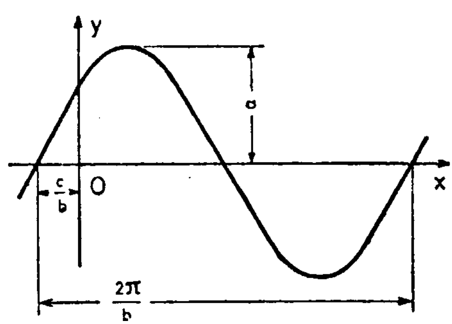
Eksantirisite $= e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

Herhangibir noktasının odaklara uzaklıkları farkı $= 2a$ dır.

14. SİNÜS EĞRİSİ. (Şekil 14)

$$y = a \sin(bx + c)$$

ve $c = c' + \dfrac{\pi}{2}$ olarak:



Şekil 14

$$y = a \cos(bx + c') = a \sin(bx + c) \qquad (a = \text{genlik})$$

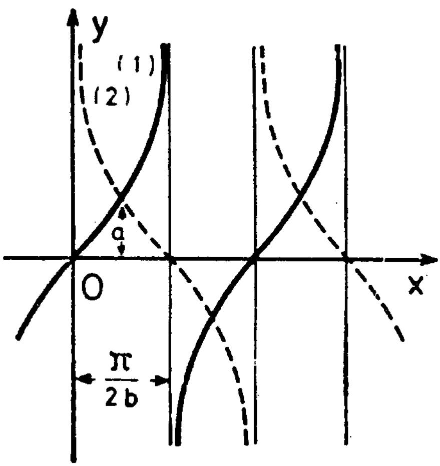
15. TRİGONOMETRİK EĞRİLER.

$y = a \operatorname{tg} bx$ (şekil 15-1)

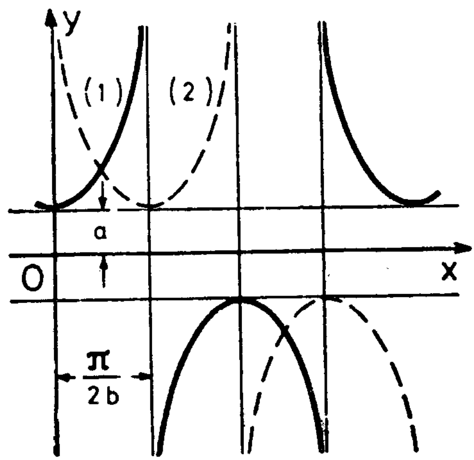
$y = a \operatorname{cotg} bx$ (şekil 15-2)

$y = a \sec bx$ (şekil 16-1)

$y = a \operatorname{cosec} bx$ (şekil 16-2)

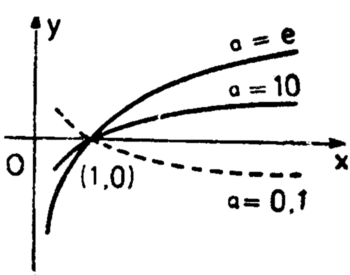


Şekil 15

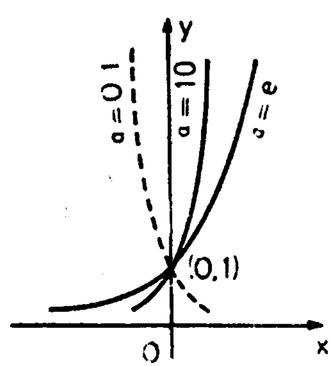


Şekil 16

16. LOGARİTMA VE ÜSTEL FONKSİYONLARIN EĞRİLERİ: (Şekil 17 ve 18)



Şekil 17. *Logaritma eğrisi*
$y = \log_a x$ *veya* $x = a^y$

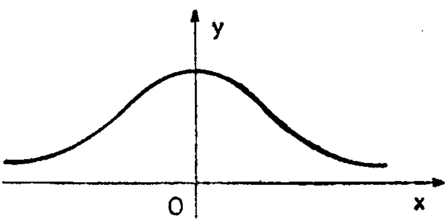


Şekil 18. *Üstel fonksiyon eğrisi*
$y = a^x$ *veya* $x = \log_a y$

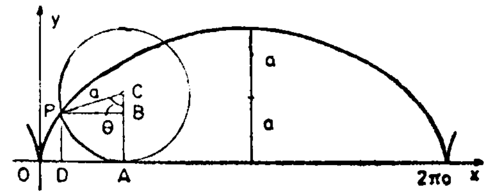
17. İHTİMAL EĞRİSİ. (Şekil 19) $y = e^{-x^2}$

18. SİKLOİD (Şekil 20)

$$x = a(\theta - \sin\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$



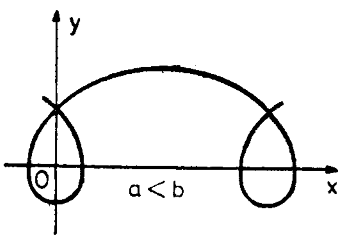
Şekil 19



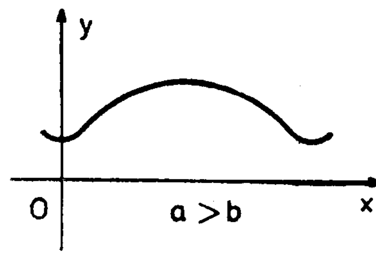
Şekil 20

Eğri, bir dairenin, bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanması halinde çemberi üzerindeki bir noktasının çizdiği eğridir.

Bir kemerinin alanı $= 3\pi a^2$, Bir kemerinin uzunluğu $= 8a$



Şekil 21. *Uzamış sikloid*



Şekil 22. *Kısalmış sikloid*

19. UZAMIŞ VE KISALMIŞ SİKLOİD. (Şekil 21 ve 22).

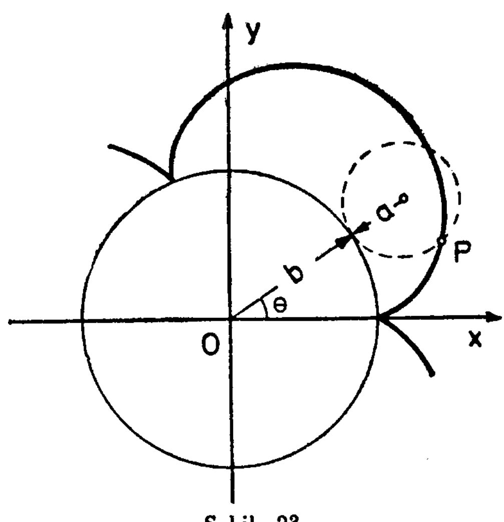
$$x = a\theta - b\sin\theta$$
$$y = a - b\cos\theta$$

20. EPİSİKLOİD. (Şekil 23).

$$x = (a+b)\cos\theta - a\cos\frac{a+b}{a}\theta$$

$$y = (a+b)\sin\theta - a\sin\frac{a+b}{a}\theta$$

Eğri, sabit bir dairenin dışında yuvarlanan diğer bir dairenin çemberi üzerindeki bir noktasının çizdiği eğridir.

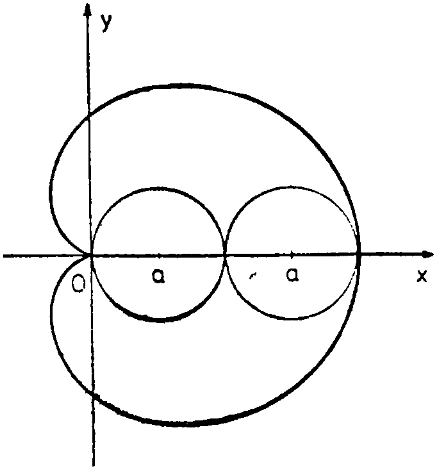


Şekil 23

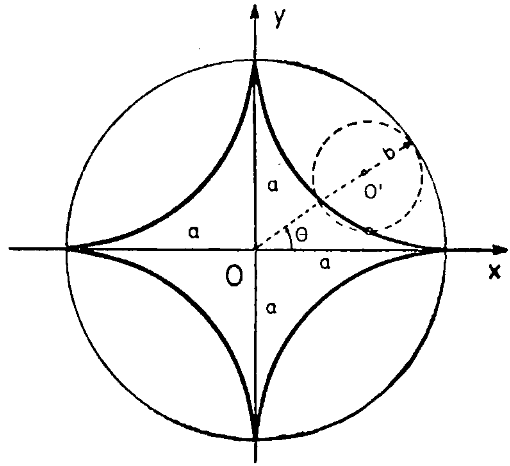
21. KARDİOİD (Şekil 24).

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

$a = b$ olması halindeki bir episikloiddir.



Şekil 24



Şekil 25

22. HİPOSİKLOİD.

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta$$

$$y = (a - b)\sin\theta - b\sin\frac{a-b}{b}\theta$$

Eğri, sabit bir halkanın içinde yuvarlanan diğer bir dairenin çemberi üzerindeki bir noktasının çizdiği eğridir.

23. DÖRT REBRUSMAN'LI HİPOSİKLOİD. (Şekil 25).

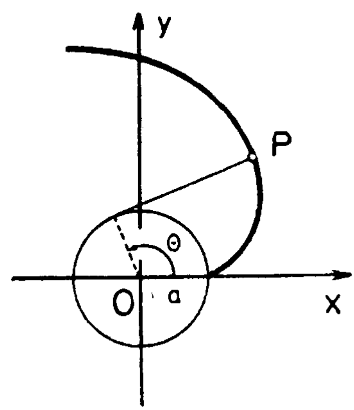
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$x = a\cos^3\theta\ , \qquad y = a\sin^3\theta$$

$a = 4b$ halindeki hiposikloid eğrisidir.

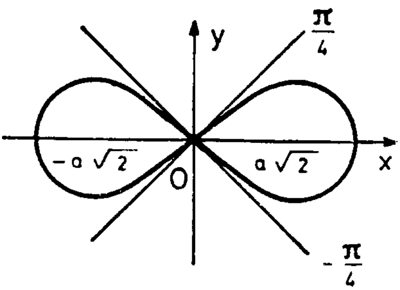
24. DAİRE BASITI (Şekil 26).

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$$
$$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

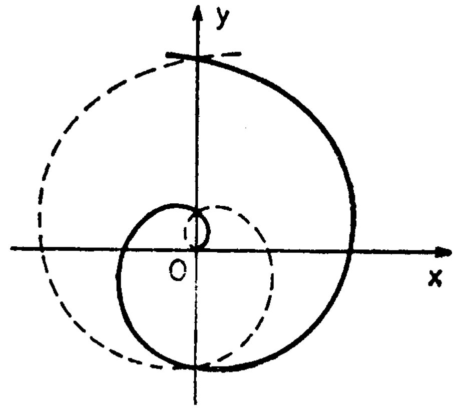


Şekil 26

Eğri, bir dairenin çemberi etrafına sarılmış ve bir ucu sabit olan bir ipliğin diğer ucunun, gergin bir şekilde çözülmesi halinde çizdiği eğridir.



Şekil 27

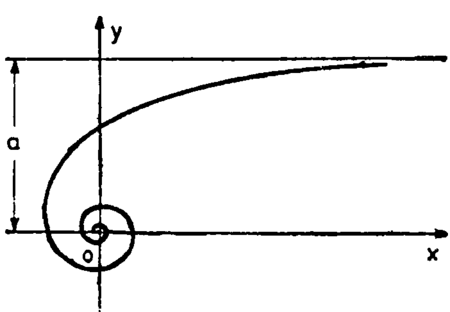


Şekil 28. *Arşimed sipiral*
$r = a\theta$

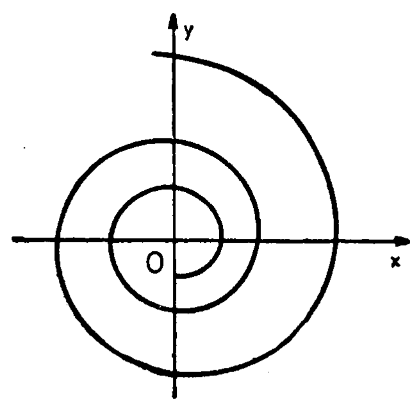
25. LEMNİSKAT. (Şekil 27)

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

26. SİPİRALLER. (Şekil 28, 29 ve 30)



Şekil 29. *Hiperbolik sipiral*
$r\theta = a$

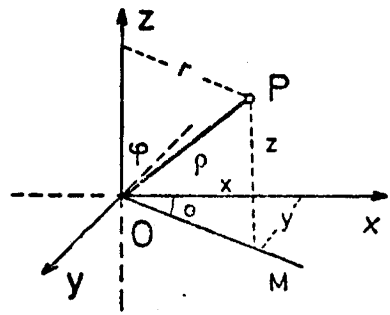


Şekil 30. *Logaritmik sipiral*
$r = e^{a\theta}$ *veya* $a\theta = \log r$

27. KOORDİNATLAR. (Şekil 31)

(1) **Kartezyen koordinatlar.** Uzaydaki bir $P(x, y, z)$ noktasının yeri, bu noktanın *zoy, xoz* ve *xoy* düzlemlerine olan x, y, z uzaklıkları ile verilmişse bunlara *noktanın kartezyen koordinatları* denir.

(2) **Silindirik koordinatlar.** Uzaydaki bir $P(r, \theta, z)$ noktasının yeri, P noktasının *xoy* düzlemindeki izdüşümünün (r, θ) kutupsal koordinatları ve noktanın *xoy* düzlemine olan z uzaklığı ile verilmiş ise (r, θ, z) e *noktanın silindirik koordinatları* denir.



Şekil 31

(3) **Küresel koordinatlar.** Uzaydaki bir $P(\rho,\theta,\varphi)$ noktası $\rho = \overline{OP}$; $\theta = \widehat{xOM}$ ve $\varphi = \widehat{zOP}$ ile verilmişse ρ, θ, φ ye *noktanın küresel koordinatları* denir.

Bu koordinat sistemleri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \rho \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \end{cases}$$

28. NOKTALAR, DOĞRULAR, DÜZLEMLER.

$P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

dir.

Bir doğrunun koordinat eksenleri ile teşkil ettiği α, β, γ açılarının kosinüslerine doğrunun *doğrultu kosinüsleri* denir.

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasını $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktasına birleştiren doğru parçasının doğrultu kosinüsleri:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}$$

dir. $\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}$ ise (doğrultu kosinüsleri ile orantılı olan a, b, c sayılarına *doğrultu sayıları* denir):

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ve

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

dir. Doğrultu açıları $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ve $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ olan iki doğru arasındaki θ açısı:

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

ifadesi ile verilmiştir.

Bir düzlemin denklemi:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

dır. A, B, C sayıları düzlemin normalinin doğrultu sayılarıdır.

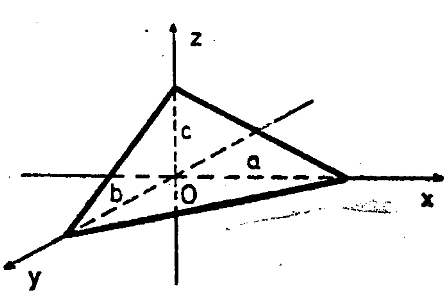
İki düzlem arasındaki açı bu düzlemlerin normallerinin teşkil ettiği açıdır.

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve doğrultu sayıları a, b, c olan *bir doğrunun denklemi:*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

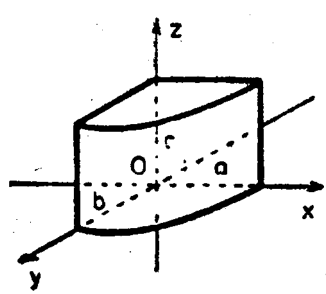
dir.

29. UZAY ŞEKİLLERİ.



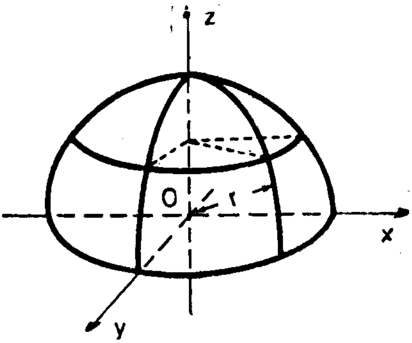
Şekil 32. *Düzlem*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



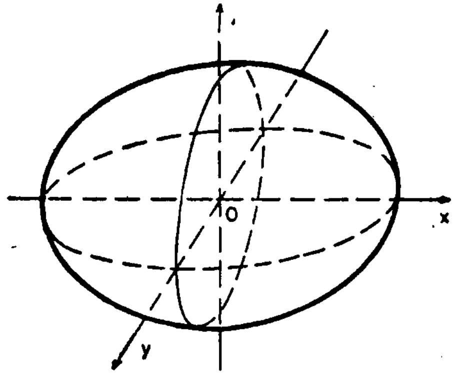
Şekil 33. *Eliptik silindir*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



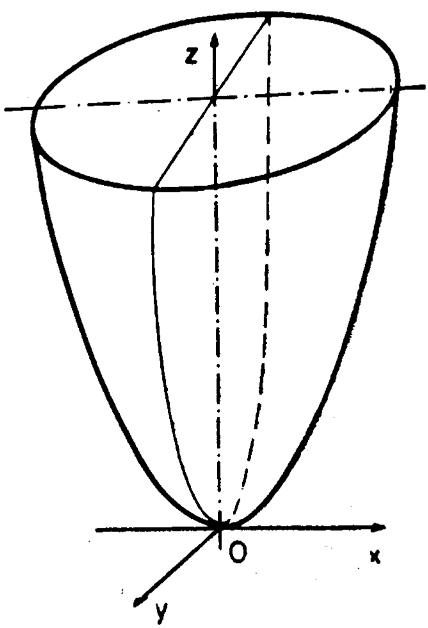
Şekil 34. *Küre*

$x^2+y^2+z^2=r^2$



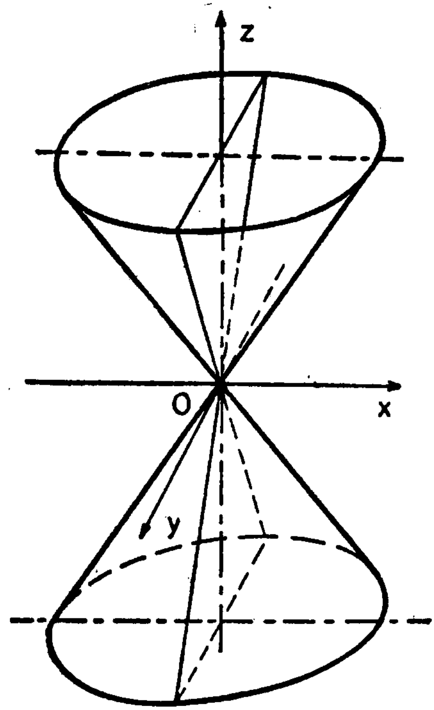
Şekil 35. *Elipsoid*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



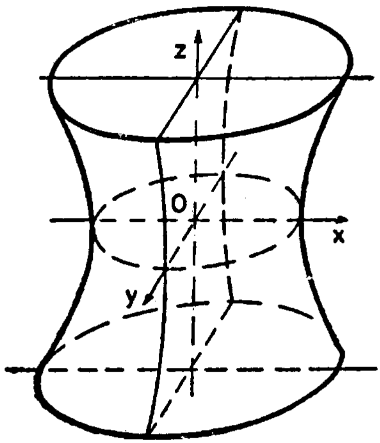
Şekil 36. *Eliptik paraboloid*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$



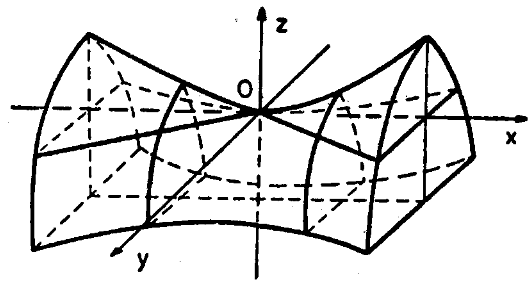
Şekil 37. *Koni*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$



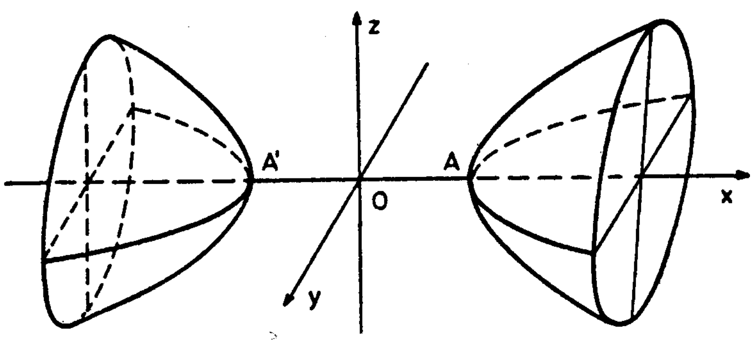
Şekil 38. *Bir yapraklı hiperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Şekil 39. *Hiperbolik paraboloid*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$$



Şekil 40. *İki yapraklı hiperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

6. DİFERANSİEL HESAP

1. TÜREV. $y = f(x)$ ise:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = Dy$$

dir. Δx ve Δy ler x ve y nin *artımlarıdır*. *Yüksek mertebeden türevler* aşağıdaki şekillerde gösterilir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} f'(x) = f''(x) \qquad \text{(ikinci mertebeden türev)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx} f''(x) = f'''(x) \qquad \text{(üçüncü mertebeden türev)}$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x) \qquad \text{(n. mertebeden türev)}$$

$f^{(n)}(a)$ sembolü $f^{(n)}(x)$ in $x = a$ için değerini gösterir.

2. TÜREVLER ARASINDAKİ BAZI BAĞINTILAR.

$x = f(y)$ ise:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

dir.

$y = f(u)$ ve $u = F(x)$ den:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

dir.

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$(parametrik denklemler)ise:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

dir. Üslerdeki noktalar parametreye yani t ye göre türev alındığını gösterir.

3. TÜREV TABLOSU. Tablodaki u, v ler x in fonksiyonlarını, a, n, e sabitleri göstermektedir. ($e = 2,718281828....$)

1. $$\frac{d}{dx} x = 1$$

2. $$\frac{d}{dx} a = 0$$

3. $$\frac{d}{dx}(u+v+\ldots) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \ldots$$

4. $$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$$

5. $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

6. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

7. $$\frac{d}{dx} u^n = n\,u^{n-1}\frac{du}{dx}$$

8. $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}\log_a e$$

9. $$\frac{d}{dx}\log_e u = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}$$

10. $$\frac{d}{dx} a^u = a^u\frac{du}{dx}\log_e a$$

11. $$\frac{d}{dx} e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

12. $$\frac{d}{dx} u^v = v\,u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v\log_e u\,\frac{dv}{dx}$$

13. $$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

14. $$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\,\frac{du}{dx}$$

15. $$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} u = \sec^2 u\,\frac{du}{dx}$$

16. $\frac{d}{dx} \text{cotg } u = - \text{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \text{ tg } u \frac{du}{dx}$

18. $\frac{d}{dx} \text{cosec } u = - \text{cosec } u \text{ cotg } u \frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx} \text{Arcsin } u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

20. $\frac{d}{dx} \text{Arccos } u = - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

21. $\frac{d}{dx} \text{Arctg } u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx} \text{sh } u = \text{ch } u \frac{du}{dx}$

23. $\frac{d}{dx} \text{ch } u = \text{sh } u \frac{du}{dx}$

24. $\frac{d}{dx} \text{th } u = \text{sech}^2 u \frac{du}{dx}$

25. $\frac{d}{dx} \text{Arg sh } u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}$

26. $\frac{d}{dx} \text{Arg ch } u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

27. $\frac{d}{dx} \text{Arg th } u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$

4. BİR EĞRİNİN EĞİMİ, TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ.

$y = f(x)$ denklemi ile verilmiş bir eğrinin herhangibir $P(x, y)$ noktasındaki *eğimi*, bu noktadaki teğetinin eğimi ile tanımlıdır. (Şekil 41)

$$\text{eğim} = m = \text{tg } \alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$x = x_1$ için eğim;

$$m_1 = f'(x_1)$$

dir.

Eğrinin $P_1(x_1, y_1)$ noktasındaki *teğetinin denklemi*:

$$y-y_1=m_1(x-x_1);$$

ve *normalinin denklemi*:

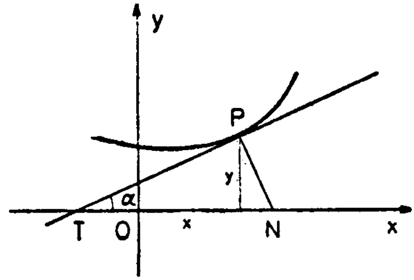
$$y-y_1=-\frac{1}{m_1}(x-x_1)$$

dir.

Kesişme noktalarındaki eğimleri m_1 ve m_2 olan iki eğrinin θ *kesişme açısı*:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1 m_2}$$

formülü ile verilmiştir.



Şekil 41

5. DİFERANSİEL. $y=f(x)$ fonksiyonunun dy diferansieli:

$$dy=df=f'(x)\,dx=\frac{df(x)}{dx}dx=\frac{dy}{dx}dx$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bağımsız değişkenin diferansieli olan dx, bu değişkenin artımı olan Δx e eşittir. $(dx=\Delta x)$. Δy ile dy birbirine eşit değildir.

$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ise $dx=\varphi'(t)\,dt$, $dy=\psi'(t)\,dt$ dir.

Diferansiel formülleri, türev formüllerinden kolayca yazılabilir.

6. BİR FONKSİYONUN MAKSİMUM VE MİNİMUM DEĞERLERİ.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığındaki *maksimum değeri*, fonksiyonun bu aralıkta almış olduğu en büyük değerdir. *Minimum değeri* ise, bu aralıkta almış olduğu değerlerin en küçüğüdür.

$x=a$ için $y=f(x)$ fonksiyonu bir maksimum veya bir minimum değere malikse $f'(x)=0$ veya ∞ dur. $x=a$, $f'(x)=0$ denkleminin bir kökü ve $f''(a)<0$ ise $f(a)$ bir maksimum değer: $f''(a)>0$ ise $f(a)$ bir minimum değerdir. $f''(a)=0$, $f'''(a)\neq 0$ ise $f(a)$ ne bir maksimum ve ne de bir minimum değerdir. Fakat $f''(a)=f'''(a)=0$ ise $f^{IV}(a)$ nın negatif veya pozitif oluşuna göre $f(a)$ maksimum veya minimum değerdir. Genel olarak, $x=a$ için sıfır olmıyan ilk türevin mertebesi tek ise $f(a)$ ne bir maksimum ve ne de bir minimum değerdir. İlk sıfır olmıyan türevin mertebesi çift ise $f(a)$ bir maksimum veya minimum değerdir.

7. BİR EĞRİNİN BÜKÜM NOKTALARI. $x=a$ için $f''(a)$ işaret değiştirerek sıfır değerini alıyorsa $x=a$ apsisli nokta $y=f(x)$ eğrisinin

bir *büküm noktası*dır. Büküm noktasında eğri, *konkav*lığını değiştirir. Eğri, $f''(x) > 0$ olduğu noktalarda yukarıya doğru; $f''(x) < 0$ olduğu noktalarda aşağıya doğru konkavdır.

8. YAY DİFERANSİELİ-EĞRİLİK-EĞRİLİK YARIÇAPI. s, $y = f(x)$ eğrisi boyunca belirli bir yay uzunluğu olsun. *Yay diferansieli*:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

dir. Eğri kutupsal deklemi ile verilmiş ise:

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\theta)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr$$

dir.

$y = f(x)$ eğrisinin herhangi bir $P(x,y)$ noktasındaki *eğriliği*:

$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

ve eğrinin $r = f(\theta)$ kutupsal denklemi ile verilmesi halinde de:

$$K = \frac{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

dir.

Eğrilik yarı çapı $= R = \dfrac{1}{K}$ dır.

$y = f(x)$ eğrisinin herhangibir $P(x,y)$ noktasındaki *eğrilik merkezinin* (α,β) koordinatları:

$$\alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}$$

$$\beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

formülleri ile verilmiştir. y', y'' bu noktadaki birinci ve ikinci mertebe türevlerin değerleridir. Bu denklemler, ayni zamanda, $y = f(x)$ eğrisinin *mebsut*unun parametrik denklemleridir.

9. ROLLE VE ORTALAMA TEOREMLERİ. *Rolle teoremi:* $y = f(x)$ fonksiyonu ve $f'(x)$ türevi (a,b) aralığında sürekli ve $f(a) = f(b) = 0$ ise x in a ile b arasında en az bir x_1 değeri için $f'(x_1) = 0$ dır.

Ortalama teoremi (sonlu artımlar formülü): $y = f(x)$ fonksiyonu ve $f'(x)$ türevi (a, b) aralığında sürekli ise x in a ile b arasında en az bir x_1 değeri için:

$$f(b) = f(a) + (b-a)\, f'(x_1) \qquad (a < x_1 < b) \qquad \text{veya}$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f'(x+\theta\Delta x) \qquad (0 < \theta < 1)$$

dir.

10. BELİRSİZ ŞEKİLLER. $f(x)$ ve $F(x)$ ve birinci mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlar olsunlar:

(1). $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} F(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} F'(x) \neq 0$ (veya $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$) iseler:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \qquad (\textit{L'hôpitale kuralı})$$

dır.

(2). $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$ ise $\lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, F(x)$ limiti $0 \times \infty$ belirsiz şeklindedir. Bu limiti hesaplamak için:

$$f(x)\, F(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{F(x)}} = \frac{F(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ şekline sokulur ve L'hôpitale kuralı uygulanır.

(3). $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ve $\lim\limits_{x\to a} F(x) = \infty$ ise $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - F(x)]$ limiti $\infty - \infty$ şeklindedir. Bu limiti hesaplamak için:

$$f(x) - F(x) = \frac{\dfrac{1}{F(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\, F(x)}}$$

yazılarak L'hôpitale kuralı uygulanır.

(4). $\lim_{x\to a} f(x)=0$; $\lim_{x\to a} F(x)=0$ ise $\lim_{x\to a} [f(x)^{F(x)}]$ limiti 0^0 ;

$\lim_{x\to a} f(x)=1$; $\lim_{x\to a} F(x)=\infty$ ise $\lim_{x\to a} [f(x)^{F(x)}]$ limiti 1^∞ ;

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$; $\lim_{x\to a} F(x)=0$ ise $\lim_{x\to a} [f(x)^{F(x)}]$ limiti ∞^0 ;

belirsiz şekillerindedir. Her üç halde de:

$$y = f(x)^{F(x)} \quad \text{den} \quad \log y = F(x) . \log f(x)$$

yazılarak Lim log y limitine varılmış olunur ki bu da $0\times\infty$ şeklindedir.

$\lim_{x\to a} \log y = k$ ise $\lim_{x\to a} y = e^k$ dır.

11. **TAYLOR VE MACLAURİN FORMÜLLERİ.** Kendisi ve türevleri sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonu genel olarak *Taylor formülü* adı verilen:

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}+\ldots\ldots+$$
$$f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$$

formülü ile temsil edilebilir. Bu formülle, x in a civarındaki değerleri için $f(x)$ in istenilen yaklaşıklıkta değerleri hesaplanabilir. *n terimden sonraki kalan* olarak adlandırılan R_n:

$$R_n = f^{(n)}(x_1)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

dir.

Bu formülde $a = 0$ yapılırsa *Maclaurin formülü* adı verilen:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots+f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$$

formülü elde edilir.

12. **SERİLER.** Fonksiyonların seriye açılımları için Maclaurin ve Taylor formüllerinden faydanılır. Bu serilerin, *yakınsaklık aralıkların*daki x değerleri için:

$$\lim_{x\to a} R_n=0$$

dır. Bu takdirde, elde edilen serilerden fonksiyonların yaklaşık değerleri, baştan yeterli miktarda terimini hesaplamak suretile bulunur.

Muhtelif seriler:

$$(a+x)^n = a^n + n\,a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,a^{n-3}x^3 + \ldots. \qquad x^2 < a^2$$

$$(a-bx)^{-1} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^3x^3}{a^3} + \ldots.\right) \qquad b^2x^2 < a^2$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots..$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots..$$

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \frac{(x\log a)^3}{3!} + \ldots. \qquad a > 0$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots.$$

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots. \qquad 0 < x \leqslant 2$$

$$\log x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots..\right] \qquad x > 0$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots. \qquad -1 < x \leqslant 1$$

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots \qquad x^2 < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots. \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots. \qquad x^2 < 1$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \ldots.$$

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \ldots.\right)$$

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \frac{37x^5}{5!} + \ldots. \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \ldots . \qquad x^2 < \frac{\pi^2}{4}$$

13. KISMİ TÜREVLER VE DİFERANSİELLER. $z = f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyonunda y sabit kabul edilip, x e göre türev alınırsa z in $\frac{\partial z}{\partial x}$ sembolü ile göstereceğimiz x e göre *kısmi türevi* elde edilmiş olur. Ayni şekilde x sabit kabul edilip y ye göre türev alınırsa $\frac{\partial z}{\partial y}$ ile gösterilen y ye göre kısmi türevi elde edilmiş olur.

Genel olarak, $u = f(x,y,z,\ldots)$ fonksiyonunun x e göre $\frac{\partial u}{\partial x}$ kısmi türevi, $y,z,\ldots$ değişkenleri sabit kabul edilmek suretile u nun hesaplanan türevidir. Birinci mertebe olarak elde edilen bu türevlerden daha yüksek mertebeden türevler de hesaplanabilir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

$x, y, z, \ldots .$ değişkenleri bir t değişkenin fonksiyonları olarak $u = f(x,y,z,\ldots)$ ise:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \ldots .$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots .$$

yazılabilir. $f(x,y,z,\ldots) = 0$ ise;

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \ldots . = 0$$

dır.

14. YÜZEYLER VE UZAY EĞRİLERİ. $f(x,y,z) = 0$ denklemi ile verilmiş bir yüzeyin (x_1, y_1, z_1) noktasındaki *teğet düzleminin denklemi*

$$(x - x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1 + (y - y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 + (z - z_1)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 = 0$$

dır. Buradaki $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1$ sembolü, $\frac{\partial f}{\partial x}$ türevinin (x_1, y_1, z_1) noktasındaki değeridir.

$f(x,y,z) = 0$ yüzeyinin (x_1, y_1, z_1) noktasındaki *normalinin denklemi:*

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1}$$

dir. Yüzeyin (x_1, y_1, z_1) noktasındaki normalinin doğrultu kosinüsleri :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1$$

sayıları ile orantılıdır *(normalin doğrultu sayıları).*

Bir uzay eğrisi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ denklemleriyle verilmiştir. Eğrinin herhangi bir noktasındaki *teğetinin doğrultu kosinüsleri:*

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} \quad \text{veya} \quad dx \ , \ dy \ , \ dz$$

ile orantılıdır. Eğrinin bir (x_1, y_1, z_1) noktasındaki *teğetinin denklemi:*

$$\frac{x - x_1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_1} = \frac{y - y_1}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_1} = \frac{z - z_1}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_1}$$

olup buradaki $\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$ sembolü, $\frac{dx}{dt}$ türevinin (x_1, y_1, z_1) noktasındaki değeridir.

7. İNTEGRAL HESABI

1. BELİRSİZ İNTEGRAL TANIMI. Türevi $f(x)$ olan bir $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in *ilkel fonksiyonu* ve diferansieli $f(x)\,dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna da $f(x)\,dx$ in *belirsiz integrali* denir.

$$d\,F(x) = f(x)\,dx \qquad \text{veya} \qquad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

ise

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

dir. Genel olarak:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

dir. Buradaki C keyfi bir sabittir.

2. BAŞLICA İNTEGRAL TEOREMLERİ VE İNTEGRAL TABLOSU. u ve v (x) in fonksiyonları; a, b, c sabitler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir :

1. $\int df(x) = f(x) + C$

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

3. $\int 0\,dx = C$

4. $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

5. $\int (u + v + w + \ldots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx + \int w\,dx + \ldots$

6. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

7. $\int \frac{u\,dv}{dx}\,dx = uv - \int v\,\frac{du}{dx}\,dx$

8. $\int f(y)\,dx = \int \frac{f(y)\,dy}{dy/dx}$

9. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

10. $\int \frac{du}{u} = \log u + C$

11. $\int e^u\,du = e^u + C$

12. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\log a} + C$

13. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

14. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

15. $\int \operatorname{tg} u\,du = \log \sec u + C = -\log \cos u + C$

16. $\int \operatorname{cotg} u\,du = \log \sin u + C$

17. $\int \sec u\,du = \log(\sec u + \operatorname{tg} u) + C = \log \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C$

18. $\int \operatorname{cosec} u\,du = \log(\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u) + C = \log \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C$

19. $\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}\,u - \frac{1}{2} \sin u \cos u + C = \frac{1}{2}\,u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$

20. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{2} \sin u \cos u + C = \frac{1}{2}\,u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$

21. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

22. $\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$

23. $\int \operatorname{tg}^2 u\,du = \operatorname{tg} u - u + C$

24. $\int \operatorname{cotg}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u - u + C$

25. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{u}{a} + C$

26. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$

27. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{Arc}\sin \frac{u}{a} + C$

28. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \log(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C$

29. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \log(u + \sqrt{u^2-a^2}) + C$

30. $\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2-u^2} + a^2 \text{arc}\sin\frac{u}{a}\right) + C$

31. $\int \sqrt{u^2+a^2}\, du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2+a^2} + a^2 \log(u + \sqrt{u^2+a^2})\right] + C$

32. $\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{u^2-a^2} - a^2 \log(u + \sqrt{u^2-a^2})\right] + C$

33. $\int \text{sh}\, u\, du = \text{ch}\, u + C$

34. $\int \text{ch}\, u\, du = \text{sh}\, u + C$

35. $\int \text{th}\, u\, du = \log(\text{ch}\, u) + C$

3. $\sqrt{a^2-x^2}$ ve $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ Yİ İHTİVA EDEN İNTEGRALLER.

$\sqrt{a^2-x^2}$ halinde $x = a \sin \varphi$ veya $x = a \cos \varphi$;

$\sqrt{x^2-a^2}$ « $x = a \sec \varphi$;

$\sqrt{x^2+a^2}$ « $x = a \,\text{tg}\, \varphi$;

değişken dönüştürmeleri yapılır.

4. KISMİ İNTEGRASYON KURALI.

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

formülünden faydalanarak daha basit bir integrale varılır.

5. R(x) BİR RASYONEL KESİR OLDUĞUNA GÖRE $\int R(x)\, dx$ İNTEGRALİNİN HESABI.

$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ve $f(x)$ in derecesi $g(x)$ in derecesinden küçük olsun.

$$g(x) = k(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \dots (x-l)^{\lambda}(x^2+px+q)^{\mu}(x^2+rx+s)^{\nu} \dots (x^2+mx+n)^{\xi}$$

ve

$$p^2 - 4q < 0 \quad , \quad r^2 - 4s < 0, \dots\dots, m^2 - 4n < 0$$

ise $R(x)$ rasyonel kesri :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} +$$

$$\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$\frac{L_{\lambda}}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{L_1}{x-l} +$$

$$\frac{P_{\mu}x + Q_{\mu}}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \frac{P_{\mu-1}x + Q_{\mu-1}}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{P_1 x + Q_1}{x^2+px+q} +$$

$$\frac{R_{\nu}x + S_{\nu}}{(x^2+rx+s)^{\nu}} + \frac{R_{\nu-1}x + S_{\nu-1}}{(x^2+rx+s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{R_1 x + S_1}{x^2+rx+s} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$\frac{M_{\xi}x + N_{\xi}}{(x^2+mx+n)^{\xi}} + \frac{M_{\xi-1}x + N_{\xi-1}}{(x^2+mx+n)^{\xi-1}} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+mx+n}$$

şeklinde basit kesirlere ayırılır. Bu suretle elde edilen basit kesirlerdeki katsayılar belirtildikten sonra herbir kesrin integrali hesaplanır.

6. İRRASYONEL CEBİRSEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİNİN HESABI.

(1). $\int R[x, (ax+b)^{m/n}]\,dx$ şeklindeki bir integralin hesabı için $(ax+b) = t^n$ değişken dönüştürmesi yapılır. Bu takdirde, $S(t)$ rasyonel bir fonksiyon olmak üzere, $\int S(t)\,dt$ integraline varılır.

(2). $\int R[x, (ax^2+bx+c)^{1/2}]\,dx$ şeklindeki bir integrali hesaplamak için :

$a>0$ ise : $(ax^2+bx+c)^{1/2} = t - \sqrt{a}\,x$;

$a<0$ ise : $(ax^2+bx+c)^{1/2} = t\,(x-\alpha)$

değişken dönüştürmeleri yapılır. α, $ax^2+bx+c=0$ denkleminin bir köküdür.

(3). $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ şeklindeki integrali hesaplamak için de

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

değişken dönüştürmesi yapılır.

7. BELİRSİZ İNTEGRALLER TABLOSU. İntegral hesabı öğrendikten sonra, sonuca daha çabuk varabilmek için aşağıda verilen integral tablosu kullanılabilir :

1. $\int dx = x + C$

2. $\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$

3. $\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x)\, dx + \ldots + \int f_n(x)\, dx$

4. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

5. $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$

$a + bx$ **in kuvvetlerini ihtiva eden şekiller**

6. $\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \log (a + bx) + C$

7. $\int (a + bx)^n\, dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n + 1)} + C \qquad n \neq -1$

8. $\int f(x, ax + b)\, dx \quad z = a + bx, \quad xz = a + bx$ dönüştürmelerinden biri yapılır.

9. $\int \frac{x\, dx}{a + bx} = \frac{1}{b^2} [a + bx - a \log (a + bx)] + C$

10. $\int \frac{x^2 dx}{a + bx} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a + bx)^2 - 2a(a + bx) + a^2 \log(a + bx) \right] + C$

11. $\int \frac{dx}{x(a + bx)} = -\frac{1}{a} \log \frac{a + bx}{x} + C$

12. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\log\frac{a+bx}{x} + C.$$

13. $$\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\log(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right] + C.$$

14. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\log(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C.$$

15. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\log\frac{a+bx}{x} + C.$$

16. $$\int \frac{xdx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C.$$

a^2+x^2, a^2-x^2, $a+bx^2$, $a+bx^n$ i ihtiva eden şekiller

17. $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

18. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C; \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C.$$

19. $$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C, \quad a>0 \text{ ve } b>0.$$

20. $$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\log\frac{a+bx}{a-bx} + C.$$

21. $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.$$

22. $$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx$$

23. $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p}$$
$$= -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{(m-n+np-1)b}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^p}$$

24. $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p}$$
$$= \frac{1}{an(p-1)x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} + \frac{m-n+np-1}{an(p-1)}\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{p-1}}$$

25. $$\int\frac{(a+bx^n)^p dx}{x^m}=-\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)x^{m-1}}-\frac{b(m-n-np-1)}{a(m-1)}\int\frac{(a+bx^n)^p dx}{x^{m-n}}$$

26. $$\int\frac{(a+bx^n)^p dx}{x^m}=\frac{(a+bx^n)^p}{(np-m+1)x^{m-1}}+\frac{anp}{np-m+1}\int\frac{(a+bx^n)^{p-1}dx}{x^m}$$

27. $$\int\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}=\frac{x^{m-n+1}}{b(m-np+1)(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{a(m-n+1)}{b(m-np+1)}\int\frac{x^{m-n}dx}{(a+bx^n)^p}$$

28. $$\int\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}=\frac{x^{m+1}}{an(p-1)(a+bx^n)^{p-1}}-\frac{m+n-np+1}{an\,(p-1)}\int\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^{p-1}}$$

29. $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right]$$

30. $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a}\left[\frac{x}{(a+bx^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}\right]$$

31. $$\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(a+bz)^n},\qquad (z=x^2 \text{ dir}).$$

32. $$\int\frac{x^2dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{-x}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}}+\frac{1}{2b(n-1)}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}$$

33. $$\int\frac{dx}{x(a+bx^n)}=\frac{1}{an}\log\frac{x^n}{a+bx^n}+C.$$

34. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^n}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{n-1}}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}$$

35. $$\int\frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\log\left(x^2+\frac{a}{b}\right)+C.$$

36. $$\int\frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

37. $$\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{a+bx^2}+C.$$

38. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

39. $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

$\sqrt{a+bx}$ i ihtiva eden şekiller.

40. $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C.$$

41. $$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C.$$

42. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C.$$

43. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx} + C.$$

44. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + C, \qquad a>0.$$

45. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C, \qquad a<0.$$

46. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

47. $$\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$$

$\sqrt{x^2+a^2}$ yi ihtiva eden şekiller.

48. $$\int (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

49. $$\int (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

50. $$\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (x^2+a^2)^{\frac{n}{2}-1}dx.$$

51. $$\int x(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{(x^2+a^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + C.$$

52. $$\int x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

53. $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

54. $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

55. $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

56. $$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

57. $$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \log(x+\sqrt{x^2+a^2} + C.$$

58. $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

59. $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$$

60. $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\log\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C.$$

61. $$\int \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x} = \sqrt{a^2+x^2} - a\log\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C.$$

62. $$\int \frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \log(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$\sqrt{x^2-a^2}$ yi ihtiva eden şekiller.

63. $$\int (x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$$

64. $$\int (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

65. $$\int (x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int (x^2-a^2)^{\frac{n}{2}-1}dx$$

66. $$\int x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}dx = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + C.$$

67. $\int x^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

68. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

69. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C.$

70. $\int \frac{xdx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^2-a^2}+C.$

71. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

72. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

73. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C\,;\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos\frac{1}{x}+C.$

74. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C.$

75. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}+C.$

76. $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C.$

77. $\int \frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\log(x+\sqrt{x^2-a^2})+C.$

$\sqrt{a^2-x^2}$ yi ihtiva eden şekiller.

78. $\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

79. $$\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8} \text{ arc sin } \frac{x}{a} + C.$$

80. $$\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{a^2 n}{n+1}\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx.$$

81. $$\int x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} dx = -\frac{(a^2-x^2)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + C.$$

82. $$\int x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8} \text{ arc sin } \frac{x}{a} + C.$$

83. $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{1/2}} = \text{arc sin } \frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + C.$$

84. $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

85. $$\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{1/2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

86. $$\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \text{ arc sin } \frac{x}{a} + C.$$

87. $$\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \text{arc sin } \frac{x}{a} + C.$$

88. $$\int \frac{x^m dx}{(a^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}}{(a^2-x^2)^{1/2}} dx.$$

89. $$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{1/2}} = \frac{1}{a} \log \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

90. $$\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x} + C.$$

91. $$\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3} \log \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

92. $$\int \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \sqrt{a^2-x^2} - a \log \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

93. $$\int \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \text{arc sin } \frac{x}{a} + C.$$

$\sqrt{2ax-x^2}$, $\sqrt{2ax+x^2}$ yi ihtiva eden şekiller.

94. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$

95. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \arccos(1-x) + C.$

96. $\int x^m \sqrt{2ax-x^2}\,dx$
$= -\frac{x^{m-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{m+2} + \frac{(2m+1)a}{m+2}\int x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx.$

97. $\int \frac{dx}{x^m\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{(2m-1)ax^m} + \frac{m-1}{(2m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}$

98. $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{m}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$

99. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{y^m}dx = -\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(2m-3)ax^m} + \frac{m-3}{(2m-3)a}\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^{m-1}}dx.$

100. $\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = -\frac{3a^2+ax-2x^2}{6}\sqrt{2ax-x^2}$
$+ \frac{a^3}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$

101. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax} + C.$

102. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$

103. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{3}{2}a^2\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$

104. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$

105. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx = -\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{x} - \arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$

106. $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^3}dx = -\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3ax^3} + C.$

107. $$\int \frac{dx}{(2ax - x^2)^{3/2}} = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}} + C.$$

108. $$\int \frac{xdx}{(2ax - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}} + C.$$

109. $$\int F(x, \sqrt{2ax-x^2})\,dx = \int F(z+a, \sqrt{a^2-z^2})\,dz, \qquad (z = x-a).$$

110. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \log(x + a + \sqrt{2ax+x^2}) + C.$$

111. $$\int F(x, \sqrt{2ax+x^2})\,dx = \int F(z-a, \sqrt{z^2-a^2})\,dz, \qquad (z = x+a).$$

$a + bx \pm cx^2$ yi ihtiva eden şekiller.

112. $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, \quad b^2 < 4ac.$$

113. $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C, \quad b^2 > 4ac.$$

114. $$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \log \frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b} + C.$$

115. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log(2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2} + C.$$

116. $$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx$$
$$= \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}} \log(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}) + C.$$

117. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

118. $$\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx =$$
$$\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2+4ac}{8c^{3/2}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

119. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}$$
$$- \frac{b}{2c^{3/2}} \log(2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}) + C.$$

120. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2c^{3/2}} \text{arc sin} \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

Diğer cebirsel şekiller

121. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}} dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b) \log (\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x}) + C.$

122. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}} dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b) \text{arc sin} \sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C.$

123. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b) \text{arc sin} \sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$

124. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \text{arc sin}\, x + C.$

125. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2 \text{arc sin} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + C.$

Üstel ve trigonometrik şekiller

126. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$

127. $\int e^x dx = e^x + C.$

128. $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

129. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

130. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

131. $\int \text{tg}\, x dx = \log \sec x = -\log \cos x + C.$

132. $\int \text{cotg}\, x dx = \log \sin x + C.$

133. $\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \log (\sec x + \text{tg}\, x) = \log \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

134. $\int \text{cosec}\, x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \log (\text{cosec}\, x - \text{cotg}\, x) = \log \text{tg} \frac{x}{2} + C.$

135. $\int \sec^2 x dx = \text{tg}\, x + C.$

136. $\int \text{cosec}^2 x dx = -\text{cotg}\, x + C.$

137. $\int \sec x \, \text{tg}\, x dx = \sec x + C.$

138. $\int \text{cosec}\, x \, \text{cotg}\, x dx = -\text{cosec}\, x + C.$

139. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

140. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

141. $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.$

142. $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx.$

143. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$

144. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

145. $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1}x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2}x \sin^n x dx.$

146. $\int \cos^m x \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x dx.$

147. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}$

148. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1}x \cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x \cos^n x}$

149. $\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^{n-2} x}$

150. $\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x dx}{\sin^n x}$

151. $\int \sin x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$

152. $\int \sin^n \cos x dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$

153. $\int \mathrm{tg}^n x dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x dx.$

154. $\int \mathrm{cotg}^n x dx = -\frac{\mathrm{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{cotg}^{n-2} x dx.$

155. $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

156. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$

157. $$\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

158. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C, \qquad a>b.$$

159. $$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C, \qquad a<b.$$

160. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C, \qquad a>b.$$

161. $$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} + C, \qquad a<b.$$

162. $$\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right) + C.$$

163. $$\int e^{ax}\sin nx dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$$

164. $$\int e^{ax}\cos nx dx = \frac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{a^2+n^2} + C.$$

165. $$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C.$$

166. $$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx.$$

167. $$\int a^{mx}x^n dx = \frac{a^{mx}x^n}{m\log a} - \frac{n}{m\log a}\int a^{mx}x^{n-1}dx$$

168. $$\int \frac{a^x dx}{x^m} = -\frac{a^x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{\log a}{m-1}\int \frac{a^x dx}{x^{m-1}}$$

169. $$\int e^{ax}\cos^n x dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x dx.$$

170. $$\int x^m \cos ax\, dx = \frac{x^{m-1}}{a^2}(ax\sin ax + m\cos ax) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\cos ax dx$$

$$\int x^m \sin ax dx = \frac{x^{m-1}}{a^2}(m\sin ax - ax\cos ax) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\sin ax dx.$$

Logaritmik şekiller

171. $\int \log x dx = x \log x - x + C.$

172. $\int \frac{dx}{\log x} = \log(\log x) + \log x + \frac{1}{2^2} \log^2 x + \dots$

173. $\int \frac{dx}{x \log x} = \log(\log x) + C.$

174. $\int x^n \log x dx = x^{n+1} \left[\frac{\log x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C.$

175. $\int e^{ax} \log x dx = \frac{e^{ax} \log x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx.$

176. $\int x^m \log^n x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \log^{n-1} x dx.$

177. $\int \frac{x^m dx}{\log^n x} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1)\log^{n-1} x} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m dx}{\log^{n-1} x}$

8. BELİRLİ İNTEGRALİN TANIMI : $f(x)$, $x = a$ dan $x = b$ ye kadar olan aralıkta sürekli bir fonksiyon olsun. Bu aralığı, apsisleri $a, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, b$ olan n parçaya bölelim. Aralıkların boyları, $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ olsun. Bu aralıkların herbirinde x in $x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n'$ gibi herhangi değerlerini alalım. $f(x)$ in $x = a$, $x = b$ limitleri arasındaki belirli integrali diye :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}[f(x_1')\,\Delta x_1 + f(x_2')\,\Delta x_2 + \ldots + f(x_n')\,\Delta x_n]$$

$$= \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\Delta x_i$$

$$= \left|\int f(x)\,dx\right|_a^b = \left|F(x)\right|_a^b = F(b) - F(a)$$

ya denir. Buradaki $F(x)$ fonksiyonu türevi $f(x)$ olan bir fonksiyondur.

9. BELİRLI İNTEGRALE AİT BAŞLICA TEOREMLER.

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_1) \qquad a<x_1<b$$

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^{B} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

eğer $x = b$ için $f(x)$ süreksiz ise :

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığındaki *ortalama değeri* :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^{b} f(x)\,dx$$

dir.

10. ALAN HESABI. $y = f(x)$ eğrisi ve $y = 0$, $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı alan, a ile b arasındaki bütün x değerleri için y ayni işarette olmak üzere:

$$F = \int_a^{b} f(x)\,dx$$

dir. $y = f(x)$ eğrisi ve $y = c$, $y = d$, $x = 0$ doğrularının sınırladığı alan:

$$F = \int_c^{d} x\,dy$$

dir.

$r = f(\theta)$ eğrisi ile $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğrularının sınırladığı alan

$$F = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\beta} r^2\,d\theta$$

dır.

11. YAY UZUNLUĞUNUN HESABI. $f(x,y) = 0$ eğrisinin (a,c) noktası ile (b,d) noktası arasında kalan kısmının uzunluğu:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

dir. Eğri $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametrik denklemleriyle verilmişse $t = a$ dan $t = b$ ye kadar olan kısmının uzunluğu:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

dir. Eğrinin denklemi $r = f(\theta)$ kutupsal denklemi ile verilmişse:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}\, dr$$

dir.

12. DÖNEL CİSİMLERİN HACMI. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ apsisli noktaları arasındaki kısmının:

1. Ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen cismin hacmı:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

2. Oy ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen cismin hacmı:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

dir. c ve d, (x) in a ve b değerlerine karşılık y değerleridir.

3. Oy ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen cismin hacmı:

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy\, dx$$

4. $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı alanın $x = d$ doğrusu etrafında dönmesinden meydana gelen cismin hacmı:

$$V = 2\pi \int_a^b (x - d)(y_2 - y_1)\, dx$$

dir.

13. DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırladığı alanın :

1. Ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen dönel cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y\, ds\ ;$$

2. Oy ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen dönel cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = 2\pi \int_c^d x\, ds$$

dir.

3. $y = k$ doğrusu etrafında dönmesinden meydana gelen dönel cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_a^b (y - k)\, ds\ ;$$

4. $x = k$ doğrusu etrafında dönmesinden meydana gelen cismin yüzeyinin alanı :

$$F = 2\pi \int_a^b (x - k)\, ds$$

dir.

14. İKİ KATLI İNTEGRALLE DÜZLEM ALANLARIN HESABI.

1. Kartezyen koordinatlarda :

$$F = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{f(x)} dy\, dx \quad \text{veya} \quad \int_c^d \int_{h(y)}^{\psi(y)} dx\, dy$$

2. Kutupsal koordinatlarda :

$$F = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r\, dr\, d\theta \quad \text{veya} \quad \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} r\, d\theta\, dr$$

dir.

15. İKİ KATLI İNTEGRALLE HACIM HESABI. $z = f(x,y)$ ise :

$$V = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy\, dx \quad \text{veya} \quad \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

dir.

16. ÜÇ KATLI İNTEGRALLE HACIM HESABI.

1. Kartezyen koordinatlarda ;

$$V = \iiint dx\, dy\, dz$$

2. Silindirik koordinatlarda :

$$V = \iiint r\, dr\, d\theta\, dz$$

3. Küresel koordinatlarda :

$$V = \iiint \rho^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

dır.

17. YÜZEYLERİN ALANI. $z = f(x,y)$ yüzeyinin alanı :

$$F = \iint \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dy\, dx$$

dir.

8. DİFERANSİEL DENKLEMLER

1. BİRİNCİ MERTEBE DİFERANSİEL DENKLEMLER. Birinci mertebe diferansiel denklemler, genel olarak;

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \quad ; \quad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M + N\frac{dy}{dx}$$

şekillerindedir.

(1). Değişkenlere ayrılabilen tip :

$M\,dx + N\,dy = 0$ diferansiel denklemi $f(x)\,dx + \varphi(y)\,dy = 0$ şekline sokulabiliyorsa değişkenlere ayrılabilen tipdir. Buradan :

$$\int f(x)\,dx + \int \varphi(y)\,dy = C$$

şeklinde genel çözüm elde edilir.

(2). Homojen tip. $M\,dx + N\,dy = 0$ denklemindeki $M(x,y)$, $N(x,y)$ fonksiyonları x ve y ye göre ayni dereceden homojen iseler diferansiel denkleme, homojen tip diferansiel denklem denir. Bu denklemde $y = ux$ değişken dönüştürmesi yapılırsa değişkenlere ayrılabilen tip denkleme varılır.

(3). Tam diferansiel tipi. $M\,dx + N\,dy = 0$ denkleminde $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ise birinci taraf $f(x,y) = C$ şeklindeki bir fonksiyonun toplam diferansielidir. $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ veya $N = \frac{\partial f}{\partial y}$ den hareket edilerek denklemin genel çözümü bulunur.

Ayni şekilde :

$$f(x,y) = \int_a^x M(x,y)\,dx + \int_b^y N(a,y)\,dy$$

formülünden $f(x,y)$ bulunarak $f(x,y) = C$ çözümüne varılır.

(4). **Lineer tip diferansiel denklem.** $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ şeklindeki bir denkleme lineer tip diferansiel denklem denir. Bu denklem $y = uv$ dönüştürmesi veya sabitin değişimi kuralı *(Lagrange kuralı)* ile çözülür.

(5). **Bernoulli diferansiyel denklemi.** $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ şeklindedir. $y^{1-n} = u$ değişken dönüştürmesi ile lineer tipde bir denklem haline getirilir.

(6). **Clairaut diferansiel denklemi.** $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$ şeklindedir. çözümü için her iki tarafın türevi alınır ve $\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılır.

(7). **Lagrange diferansiel denklemi.** $y + x\,f(y') + \varphi(y') = 0$ şeklindedir. Çözümü için türev alınır ve $y' = p$ dönüştürmesi yapılır. x, fonksiyon ve p bağımsız değişken gibi düşünülür.

(8). **Riccati diferansiel denklemi.** $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x) = 0$ şeklindedir. Denklemin y_1 gibi bir özel çözümü biliniyorsa $y = y_1 + u$ dönüştürmesi yapılarak Bernoulli denklemine varılır.

2. İKİNCİ MERTEBE DİFERANSİEL DENKLEMLER (Bağımlı ve bağımsız değişkenlerden birinin denklemde bulunmaması hali).

(1). $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ **tipi.** Her iki tarafın iki defa integrali alınarak genel çözüm elde edilir.

(2). $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ **tipi.** Denklemin heriki tarafı $2\frac{dy}{dx}dx$ ile çarpılarak

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\,f(y)\,dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int 2\,f(y)\,dy + C$$

şeklinde birinci mertebe bir denkleme varılır.

(3). $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ **tipi.** $\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi ile $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$ şeklinde birinci mertebe bir denkleme varılır.

(4). $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ tipi. $\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

olarak :

$$p\,\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

şeklinde birinci mertebeden bir denkleme varılır.

3. n. MERTEBEDEN LİNEER VE SABİT KATSAYILI DİFERANSİEL DENKLEMLER.

$$A_0 \frac{d^ny}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)$$

şeklindedir. $f(x) = 0$ ise denkleme ikinci tarafsız denklem denir.

(1). İkinci tarafsız denklemin çözümü :

$$A_0 \frac{d^ny}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0$$

denkleminden :

$$A_0 r^n + A_1 r^{n-1} + \dots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

karakteristik denklemi yazılır. Bu denklemin :

reel kökleri	$r_1, r_2, \dots, r_l$
Katlılık mertebeleri	$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$
Kompleks kökleri	$\alpha_1 \mp \beta_1 i, \alpha_2 \mp \beta_2 i, \dots, \alpha_m \mp \beta_m i$
katlılık mertebeleri	$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$

ise diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = \sum_{k=1}^{l} e^{r_k x} P_{\lambda_k - 1}(x) + \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k x} [S_{\nu_k - 1}(x) \cos \beta_k x + T_{\nu_k - 1}(x) \sin \beta_k x]$$

dir. P, S, T ler dereceleri indislerine eşit x in tam polinomlarıdır.

(2). İkinci taraflı denklemin çözümü.

$$\text{I} - \quad A_0 \frac{d^ny}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = f(x)$$

denkleminin genel çözümünü elde etmek için ikinci tarafsız denklemin y_1 genel çözümüne ikinci taraflı denklemin bir y_2 özel çözümünü ilâve etmek kâfidir. Buna göre genel çözüm $y = y_1 + y_2$ dir.

Özel çözümler:

a) $f(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + ... + B_n$ şeklinde ise y_2 özel çözümü:

$$y_2 = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + ... + C_n$$

şeklindedir. r^m karakteristik denklemin bir çarpanı ise özel çözüm:

$$y_2 = x^m (C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + ... + C_n$$

şeklindedir.

b) $f(x) = De^{\alpha x}$ şeklinde ise $y_2 = Ke^{\alpha x}$ şeklindedir. $(r - \alpha)^m$ karakteristik denklemin bir çarpanı ise özel çözüm: $y_2 = Kx^m e^{\alpha x}$ şeklindedir.

c) $f(x) - C \sin ax$ veya $C \cos ax$ şeklinde ise özel çözüm:

$$y_2 = A \sin ax + B \cos ax$$

şeklindedir. $(r^2 + a^2)^m$ karakteristik denklemin bir çarpanı ise özel çözüm:

$$y_2 = x^m(A \sin ax + B \cos ax)$$

şeklinde olur.

d) $f(x) = \varphi(x) e^{\alpha x}$ şeklinde ise $y = e^{\alpha x} z$ dönüştürmesi yapılır ve denklem $e^{\alpha x}$ ile kısaltılır.

e) $f(x)$ birkaç fonksiyonun toplamı şeklinde ise y_2 özel çözümü, bunların herbirine karşılık olan özel çözümlerin toplamına eşittir.

II. GENEL KURAL (LAGRANGE KURALI)—. $f(x)$ bu şekillerden biri şeklinde değilse ikinci tarafsız denklemin genel çözümüne *sabitin değişimi* (Lagrange) kuralı uygulanır. Örneğin $Ay'' + By' + Cy = f(x)$ denkleminin genel çözümünü bu kuralla elde edelim:

$$Ay'' + By' + Cy = 0$$

denkleminin genel çözümü:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

olsun. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için C_1 ve C_2 nin ne şekilde fonksiyonlar olması gerektiğini araştıralım. C_1 ve C_2 iki tane bilinmiyen fonksiyon olup bu fonksiyonları bir tane bütünler şarta bağlı kılabiliriz. Bu şart y nin türevleri basit değerlere eşit olacak şekilde seçilir:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

den türev alınarak :

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2$$

elde edilir. Buradan bütünler şart olarak :

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$

seçelim. Buna göre:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

olarak :

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'$$

bulunur. Bunlar ikinci taraflı denklemde yerlerine konulursa :

$$A(C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2') + B(C_1 y_1' + C_2 y_2') + C(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$$

$$C_1(Ay_1'' + By_1' + Cy_1) + C_2(Ay_2'' + By_2' + Cy_2) + A\,C_1' y_1' + A\,C_2' y_2' = f(x)$$

ve y_1, y_2 ikinci tarafsız denklemin çözümleri olduklarından :

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 = 0$$
$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 = 0$$

olup :

$$A\,C_1' y_1' + A\,C_2' y_2' = f(x)$$

elde edilir. Bu ifade ile yukarıdaki bütünler şartın meydana getirdiği :

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$
$$A\,C_1' y_1' + A\,C_2' y_2' = f(x)$$

denklem sisteminden C_1', C_2' ve bunlardan da C_1 ve C_2 hesaplanarak (y) ifadesinde yerlerine konulursa ikinci taraflı denklemin genel çözümü bulunmuş olur.

4. $x^n \dfrac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} x \dfrac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$ **DENKLEMİ (Euler denklemi) :**

$e^t = x$ dönüştürmesi yapılırsa :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\,D\,y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-t}\left[-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right]$$

$$= e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}(D^2 - D)\,y$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2}\right) - e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-3t}(D^3 - 3D^2 + 2D)\,y$$

. . . .

ve bunlardan :

$$x \frac{dy}{dx} = \mathrm{D}\, y$$

$$x \frac{d^2y}{dx^2} = (\mathrm{D}^2 - \mathrm{D})y$$

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = (\mathrm{D}^3 - 3\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D})\, y$$

. . . .

elde edilir ki bunlar diferansiel denklemde yerlerine konulursa sabit katsayılı lineer bir diferansiel denkleme varılır.

İKİNCİ KISIM

Problemler

1. DETERMİNANTLAR

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini yazınız.*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

2. $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 3 \times 2 = 28 - 6 = 22$$

3. $\begin{vmatrix} -2a & b \\ -b & 3a \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} -2a & b \\ -b & 3a \end{vmatrix} = -6a^2 + b^2$$

4. $\begin{vmatrix} x+2 & 2x+5 \\ 3x-1 & x-3 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+5 \\ 3x-1 & x-3 \end{vmatrix} = (x+2)(x-3)-(2x+5)(3x-1) = -5x^2-14x-1$$

5. $\left.\begin{matrix} 4x+2y=5 \\ 3x-4y=1 \end{matrix}\right\}$ *denklem sistemini determinantlar yardımı ile çözünüz.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-20-2}{-16-6} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4-15}{-16-6} = \frac{-11}{-22} = \frac{1}{2}$$

6. $\left.\begin{matrix} 5x+3y=11 \\ 3x+2y=7 \end{matrix}\right\}$ *denklem sistemini determinantlar yardımı ile çözünüz.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{22 - 21}{10 - 9} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{35 - 33}{10 - 9} = 2$$

7. $\left.\begin{aligned} \frac{3}{2x} + \frac{8}{5y} = 3 \\ \frac{4}{3y} - \frac{1}{x} = 1 \end{aligned}\right\}$ *denklem sistemini determinatlar yardımiyle çözünüz*

$$\frac{1}{x} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & \frac{8}{5} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{8}{5} \\ -1 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}} = \frac{4 - \frac{8}{5}}{2 + \frac{8}{5}} = \frac{2}{3}, \qquad x = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{8}{5} \\ -1 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{2 + \frac{8}{5}} = \frac{5}{4}, \qquad y = \frac{4}{5}$$

8. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini yazınız.*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

9. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-3)(-3) + (5)(-1)(-3) + (1)(2)(2) - (1)(-3)(-3) - (-1)(2)(-1) - (-3)(2)(5)$$

$$= -9 + 15 + 4 - 9 - 2 + 30 = 29$$

10. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + c^3 + b^3 - 3\,a\,b\,c$$

11. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(x-2) + 4(z-2) + 4(y+3) - 3(z-2) + 8(x-2) + 2(y+3)$$

$$= 11(x-2) + 6(y+3) + (z-2)$$

$$= 11x + 6y + z - 6$$

12. *k ne olmalıdır ki :*

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -k & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

olsun.

$$\begin{vmatrix} k+3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -k & -3 & 3 \end{vmatrix} = -6(k+3) + 18 - k + 4k + 3(k+3) - 9 = 0$$

$$-6k - 18 + 18 + 3k + 3k + 9 - 9 = 0$$

$$0 . k + 0 = 0$$

olarak k'nın her değeri için determinant sıfıra eşittir.

13. $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 5 \\ 3x - 2y + 2z &= -3 \\ x - 3y - 3z &= -2 \end{aligned}\right\}$ *denklem sistemini çözünüz.*

Bilinmiyenlerin paydalarını teşkil eden katsayılar determinantı :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 42 \qquad \text{olup :}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{42}{42} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{84}{42} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-42}{42} = -1 \qquad \text{dir.}$$

14. $\left.\begin{aligned} 3i_1 - 2i_2 + 4i_3 &= 2 \\ i_1 + 3i_2 - 6i_3 &= 8 \\ 2i_1 - i_2 - 2i_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$ *denklem sisteminden i_3 ü determinantlar yardımı ile hesaplayınız.*

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 2 - 32 - 12 + 24 - 0}{-18 - 4 + 24 - 24 - 18 - 4} = \frac{-22}{-44} = \frac{1}{2}$$

15. $\left.\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{2} \\ \frac{4}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} &= \frac{2}{3} \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{4}{z} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$ *denklem sisteminden x i determinantlar yardımiyle çözünüz.*

$$\frac{1}{x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 2 & 1\\ \frac{2}{3} & 2 & -3\\ \frac{1}{3} & -4 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 2 & -3\\ 3 & -4 & 4\end{vmatrix}}=\frac{4-\frac{8}{3}-2-\frac{2}{3}-6-\frac{16}{3}}{8-16-18-6-12-32}=\frac{-\frac{38}{3}}{-76}=\frac{1}{6}$$

olarak $x=6$ bulunur.

16. $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ *determinantının değerini birinci sütundaki elemanların minörlerine göre yazınız.*

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

17. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 7\end{vmatrix}$ *determinantının değerini birinci satırdaki elemanların minörleri yardımiyle hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 7\end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{vmatrix}$$

$$=1\,(28-30)-0+2\,(18-20)$$

$$=-2-4=-6$$

18. $\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x^2 & y^2 & 1\\ x^3 & y^3 & 1\end{vmatrix}$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Birinci sütunun elemanları x, ikinci sütunun elemanları y ortak çarpanına haiz olduklarından :

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x^2 & y^2 & 1\\ x^3 & y^3 & 1\end{vmatrix}=xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & 1\\ x^2 & y^2 & 1\end{vmatrix}$$

yazılabilir. Şimdi de üçüncü sütununun elemanlarını bir ve ikinci sütunun karşılık elemanlarından çıkaralım ve elde edilen determinantı, birinci satırının elemanlarının minörleri yardımı ile hesaplıyalım. Bu suretle :

$$xy\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & 1\\ x^2 & y^2 & 1\end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x-1 & y-1 & 1\\ x^2-1 & y^2-1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= xy\begin{vmatrix}x-1 & y-1\\ x^2-1 & y^2-1\end{vmatrix}$$

$$= xy\,(x-1)\,(y-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ x+1 & y+1\end{vmatrix}$$

$$= xy\,(x-1)\,(y-1)\,(y-x)$$

elde edilir.

19. $\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix}$ *determinantının değerinin sıfıra eşit olduğunu gösteriniz.*

İkinci sütunun elemanlarını üçüncü sütundaki karşılık elemanlarına ilave edersek elde edilen determinantın üçüncü sütunundaki bütün elemanlar $a+b+c$ ye eşit olarak bu ifade ortak çarpan şeklinde çubuklar dışına çıkarılabilir. Bu suretle:

$$\begin{vmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & c+a\\ 1 & c & a+b\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a & a+b+c\\ 1 & b & a+b+c\\ 1 & c & a+b+c\end{vmatrix} = (a+b+c\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & c & 1\end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu son elde edilen determinantın birinci ve üçüncü sütunlarındaki elemanlar karşılıklı olarak birbirinin ayni olduklarından bu determinantın değeri sıfıra eşittir. Buna göre çarpım da sıfır olacağından verilen determinant sıfır olur.

20. *Determinantların değerini hesaplamadan:*

$$\begin{vmatrix}a^2 & a & 1 & bcd\\ b^2 & b & 1 & acd\\ c^2 & c & 1 & abd\\ d^2 & d & 1 & abc\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a^3 & a^2 & a & 1\\ b^3 & b^2 & b & 1\\ c^3 & c^2 & c & 1\\ d^3 & d^2 & d & 1\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\,(b-c)\,(b-d)\,(c-d)$$

olduğunu gösteriniz.

Verilen eşitlikte sıra ile $a=b$, $a=c$, $a=d$, $b=c$, $b=d$ ve $c=d$ yapılırsa determinantlar iki satırı birbirinin ayni olan determinantlar haline girerek sıfır değerine haiz olurlar. Bu suretle determinantların $(a-b)$, $(a-c)$, $(a-d)$, $(b-c)$, $(b-d)$ ve $(c-d)$ yi çarpan kabul ettikleri gösterilmiş olur.

21. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 6 & -5 \\ 12 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

Birinci sütundaki elemanlar 3, üçüncü sütundaki elemanlar da 2 ortak çarpanına haiz olduklarından:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 9 & -3 & 6 & -5 \\ 12 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (3)(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

yazılabilir. Son elde edilen determinantda ise bir ve üçüncü sütunun karşılıklı elemanları birbirine eşit olduğundan bu determinant sıfıra eşit olur ve bu sebepten verilen determinantın değeri de sıfır olarak bulunur.

22. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

Birinci satırın elemanlarını (—2) ile çarpıp ikinci satırdaki karşılık elemanlarına; (—3) ile çarpıp dördüncü satırdaki karşılık elemanlarına ve (1) ile çarpıp üçüncü satırdaki karşılık elemanlarına ilave edersek:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ -9 & 0 & 5 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 7 \\ -10 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Şimdi de elde edilen determinantın değerini ikinci sütunun elemanlarının minörlerine göre yazarsak:

$$-(1) \begin{vmatrix} -9 & 5 & -2 \\ 7 & 1 & 7 \\ -10 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

bulunur. Bu determinantı hesaplamak üzere evvela ikinci sütundaki elemanları (—7) ile çarpıp bir ve üçüncü sütundaki karşılık

olan elemanlarına ilave eder ve sonra da determinantın değerini ikinci satırın elemanlarının minörleri yardımı ile hesaplarsak:

$$-\begin{vmatrix} -44 & 5 & -37 \\ 0 & 1 & 0 \\ -31 & 3 & -28 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -44 & -37 \\ -31 & -28 \end{vmatrix}$$

$$= -(44 \times 28 - 31 \times 37) = -85$$

bulunur.

23. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini hesaplayınız.*

İkinci sütunun elemanlarını sırası ile (3), (2), (1) ve (—4) ile çarpıp birinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci sütundaki karşılık elemanlarına ilave edersek:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -3 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -2 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Şimdi de bu determinantın değerini üçünü satırındaki elemanların minörlerine göre yazalım:

$$= (-1)^{3+2}(1)\begin{vmatrix} -8 & -4 & -6 & 13 \\ 5 & 5 & 4 & -11 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

ve burada da üçüncü satırın elemanlarını sırası ile (6) ve (— 4) ile çarpıp birinci ve ikinci satırın karşılık elemanlarına ilave eder ve sonra da elde edilen determinantın değerini üçüncü sütunun elemanlarının minörlerine göre yazarsak:

$$-\begin{vmatrix} -50 & -22 & 0 & 79 \\ 33 & 17 & 0 & -55 \\ -7 & -3 & 1 & 11 \\ -3 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -50 & -22 & 79 \\ 33 & 17 & -55 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Son determinantda üçüncü satırın elemanlarını (3) ile çarpıp birinci satırdaki karşılık elemanlarından çıkarır ve (2) ile çarpıp ikinci satırdaki karşılık elemanlarına ilave edersek:

$$= - \begin{vmatrix} -41 & 2 & 52 \\ 27 & 1 & -37 \\ -3 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

ve burada da ikinci satırın elemanlarının iki katını birinci satırdakilerden çıkarır ve (8) katını üçüncü satırdakilere ilave edersek:

$$= - \begin{vmatrix} -95 & 0 & 126 \\ 27 & 1 & -37 \\ 213 & 0 & -287 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -95 & 126 \\ 213 & -287 \end{vmatrix}$$

$$= -(95 \times 287 - 213 \times 126)$$

$$= -427$$

bulunur.

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini ilk iki sütunun minörlerinden faydalanarak hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{1+4+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3)(1) + (-2)(1) - (5)(-1)$$

$$= 0$$

bulunur.

25. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini ilk iki satırın minörlerinden faydalanarak hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16)$$

$$= -286$$

26. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini ilk üç satırın minörlerinden faydalanarak hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+3+4+5+6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[(-1)^{3+1}(3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+1}(6)\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -18(0-2)(0-20)$$

$$= -18(-2)(-20) = -720$$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *determinantının değerini ilk iki sütunun minörlerinden faydalanarak hesaplayınız.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+5+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (2-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-2)-(1-2) = 1+1 = 2$$

28. $$\left. \begin{aligned} 2x + y - z + u &= -4 \\ x + 2y + 2z - 3u &= 6 \\ 3x - y - z + 2u &= 0 \\ 2x + 3y + z + 4u &= -5 \end{aligned} \right\}$$ *denklem sistemini determinantlar yardımı ile çözünüz.*

Katsayılar determinantı $= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 86$ olarak:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{86} = \frac{86}{86} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{86} = \frac{-172}{86} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}}{86} = \frac{258}{86} = 3$$

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{86} = \frac{-86}{86} = -1$$

dir.

29. $\left.\begin{array}{r} i_1 - 2i_2 + i_3 = 3 \\ i_2 + 3i_4 - i_5 = -5 \\ i_1 + i_2 + i_3 - i_5 = 1 \\ 2i_2 + i_3 - 2i_4 - 2i_5 = 0 \\ i_1 + i_3 + 2i_4 + i_5 = 3 \end{array}\right\}$ *denklem sisteminden* (i_3) *ü hesaplayınız.*

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{38}{19} = 2$$

Aşağıdaki determinantların değerlerini hesaplayınız.

30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ Cevap : — 557

31. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ -5 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ Cevap : — 219

32. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 10 & 13 & -8 \end{vmatrix}$ Cevap : 158

33. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ Cevap : 38

34. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ Cevap : — 143

35. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Cevap : 88

Aşağıdaki denklem sistemlerini determinantlar yardımı ile çözünüz.

36. $\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - 2y - 3z &= 1 \\ 3x + 2y + 4z &= 5 \end{aligned}\right\}$ Cevap : $x = 1,\ y = -3,\ z = 2.$

37. $\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z - u &= -1 \\ x + y - 3z + u &= 2 \\ 2x + 2y - z + 3u &= 13 \\ x - 3y + 2z - 2u &= -1 \end{aligned}\right\}$ Cevap : $x = 2,\ y = -1,\ z = 1,\ u = 4.$

38. $\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z + 2u &= 2 \\ x + 4y - z - u &= 0 \\ 2x + 3z + 4u &= 3 \\ y - 2z - 4u &= 2 \end{aligned}\right\}$ Cevap : $x = 1,\ y = 0,\ z = 3,\ u = -2.$

39. $\left.\begin{aligned} x - 2y + z - 3u &= 4 \\ 2x + 3y - z - 2u &= -4 \\ 3x - 4y + 2z - 4u &= 12 \\ 2x - y - 3z + 2u &= -2 \end{aligned}\right\}$ Cevap : $x = 2,\ y = -1,\ z = 3,\ u = 1.$

40. $\left.\begin{aligned} 2x + y - 3z &= -5 \\ 3y + 4z + u &= 5 \\ 2z - u - 4x &= 0 \\ u + 3x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$ Cevap : $x = 1,\ y = -1,\ z = 2,\ u = 0.$

41. $\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4u &= -8 \\ y - 2z + 3u - 4x &= 6 \\ z - 2u + 3x - 4y &= -8 \\ u - 2x + 3y - 4z &= -2 \end{aligned}\right\}$ Cevap : $x = 0,\ y = 1,\ z = 2,\ u = 3.$

2. FONKSİYON

1. $f(x) = x^2 + 5x + 3$ *olduğuna göre:*

a) $f(0)$, *b)* $f(-2)$, *c)* $f(x^2)$, *d)* $f(t+2)$, *e)* $f(x-h)$,

f) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *ifadelerini hesaplayınız.*

a) $f(0) = 3$

b) $f(-2) = -3$

c) $f(x^2) = x^4 + 5x^2 + 3$

d) $f(t+2) = t^2 + 9t + 17$

e) $f(x-h) = x^2 - (2h-5)\,x + (h^2 - 5h + 3)$

f) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2+5(x+h)+3-(x^2+5x+3)}{h} = 2x+5+h$

2. $f(x) = x^2 + 1$ *ve* $g(x) = 2x - 1$ *olduğuna göre:* $f[g(0)]$, $g[f(0)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ *ve* $f[f(x)]$ *i hesaplayınız.*

$f[g(0)] = 2$ $\qquad\qquad$ $g[f(0)] = 1$

$f[g(x)] = (2x-1)^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 2$

$g[f(x)] = 2(x^2+1) - 1 = 2x^2 + 1$

$f[f(x)] = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

3. $\varphi(x) = \sin x$ *olduğuna göre:*

a) $\varphi(0) = 0$, *b)* $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, *c)* $\varphi(2y) = 2\varphi(y)\,\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$

olduğunu gösteriniz.

a) $\varphi(0) = \sin 0 = 0$

b) $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

c) $\varphi(2y) = \sin 2y = 2 \sin y \cos y \doteq 2 \sin y \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$$= 2\varphi(y)\varphi\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

4. $F(x) = a^x$ *olduğuna göre* $F(x-y) = \dfrac{F(x)}{F(y)}$ *olduğunu gösteriniz.*

$$F(x-y) \doteq a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} = \frac{F(x)}{F(y)}$$

5. $f(x) = \cos x$ *olduğuna göre* $f(2x) - 2[f(x)]^2 + 1 = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

$$\begin{aligned} f(2x) - 2[f(x)]^2 + 1 &= \cos 2x - 2\cos^2 x + 1 \\ &= \cos 2x - (2\cos^2 x - 1) \\ &= \cos 2x - \cos 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. $(x^2+5)^3 + (x-x^3)^4$ *fonksiyonunun sürekli olduğu aralıkları belirtiniz.*

Fonksiyon x in her değeri için süreklidir.

7. $\dfrac{2x}{x^4-5x^2+4}$ *fonksiyonunun sürekli olduğu aralıkları belirtiniz.*

Fonksiyon $x = 1$ ve $x = 2$ değerleri hariç x in diğer bütün değerleri için süreklidir.

8. $\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$ *fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkları belirtiniz.*

Fonksiyon $1 \leqslant x \leqslant 2$ ve $x \geqslant 3$ aralıklarında tanımlıdır.

9. $\sqrt{-x^2}$ *fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkları belirtiniz.*

Fonksiyon, yalnız $x = 0$ için tanımlıdır.

10. $y = \dfrac{1}{x(x-4)}$ *fonksiyonunun süreksiz olduğu yerleri belirtiniz.*

Fonksiyon $x = 0$ ve $x = 4$ değerleri için süreksizdir.

11. $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$ *fonksiyonunun tanım aralığını belirtiniz.*

Fonksiyon $x < -2$ ve $x \geqslant 3$ aralıklarında tanımlıdır.

12. $f(x)=2^{x-3}$ olduğuna göre $f(0) : f(-1) : f(1) : f(3)$ değerlerini hesaplayınız.

13. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ olduğuna göre $f(x-1)$ ve $f(a+b)$ değerlerini hesaplayınız.

14. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ olduğuna göre $f(x+1) - f(x)$ i hesaplayınız.

15. $f(x) = \log \dfrac{x}{x+1}$ olduğuna göre $f(y) - f(z)$ yi hesaplayınız.

16. $F(x) = C^{x+2}$ olduğuna göre $F(y)/F(z) = F(y - z - 2)$ olduğunu gösteriniz.

17. $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ olduğuna göre $f(\pi-2x) = 1 - 2[f(x)]^2$ olduğunu gösteriniz.

18. $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ olduğuna göre :

$f(1, 2) = 11$; $f(2, 1) = 2$; $f(-1, 3) = 46$:

$f(y, x) = y^2 - 3yx + 4x^2$ ve

$f(x+1, y-2) = x^2 - 3xy + 4y^2 + 8x - 19y + 23$ olduğunu gösteriniz.

19. $f(x) = x^2$ olduğuna göre :

$$f(x^2 + y^2) = f[f(x)] + f[f(y)] + 2f(x)\,f(y)$$

olduğunu gösteriniz.

20. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ olduğuna göre $\dfrac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)\,f(y)} = \dfrac{x - y}{1 + xy}$ olduğunu gösteriniz.

21. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ olduğuna göre $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ı hesaplayınız.

22. $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ ve $F(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2}$ ise $F(x,y) = [f(x,y)]^2 - 2$ olduğunu gösteriniz.

23. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ ve $F(x) = \sqrt{x^2+4}$ ise $f\left(a + \dfrac{1}{a}\right) + F\left(a - \dfrac{1}{a}\right) = 2a$ olduğunu gösteriniz.

3. LİMİT

1. *$\lim\limits_{x \to 1} (3x^3 - 5x^2 + 4x)$ limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x \to 1} (3x^3 - 5x^2 + 4x) = \lim_{x \to 1} 3x^3 - \lim_{x \to 1} 5x^2 + \lim_{x \to 1} 4x$$

$$= 3 - 5 + 4 = 2$$

2. *$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2 - 1)(x^3 + 4)}{x + 2}$ limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 1)(x^3 + 4)}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 1) \, . \lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 4)}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 2)}$$

$$= \frac{3 \, . \, 12}{4} = 9$$

3. *$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ limitini hesaplayınız.*

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3}$$

olup

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9) \, . \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x - 3}$ dir. $\dfrac{x - 3}{x - 3}$ kesri $x = 3$ değeri hariç 1 e eşittir. O halde $x = 3$ için verilen kesir tanımlanmamıştır. Buna göre :

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x - 3} = 1$ olup $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9) \, . \, 1 = 27$ dir.

4. *$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4x + 5}{4x^2 - 3}$ limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x + 5}{4x^2 - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{4 - \dfrac{3}{x^2}} = \frac{3}{4} \quad \text{veya}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x+5}{4x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4} \text{ dir.}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2+x-2}$ *limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3+3x^2+x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}} = 0$$

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$ *limitini hesaplayınız,*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x-1}\,(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+3-3x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}} = 0$$

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x+1-9)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{9}{8} \text{ dir.}$$

8. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup:

$$\lim_{x \to a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{x^{3/2} - a^{3/2}}{x^{1/2} - a^{1/2}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x^{1/2} - a^{1/2})(x + x^{1/2}a^{1/2} + a)}{x^{1/2} - a^{1/2}}$$

$$= \lim_{x \to a} (x + x^{1/2}a^{1/2} + a) = 3a \quad \text{dır.}$$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{3-3x} - \sqrt{3+5x}}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{3-3x} - \sqrt{3+5x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})(\sqrt{3-3x} + \sqrt{3+5x})}{(\sqrt{3-3x} - \sqrt{3+5x})(\sqrt{3-3x} + \sqrt{3+5x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - x - 1 - x)(\sqrt{3-3x} + \sqrt{3+5x})}{(3 - 3x - 3 - 5x)(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(\sqrt{3-3x} + \sqrt{3+5x})}{8(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{dir.}$$

10. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a}}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2})}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2\sqrt[6]{a^5}}{3a}$$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-\sqrt[3]{(1-x)^2}}{x\,[\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1-x}]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3-(1-x)^2}{x\,(\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1-x})[(1+x)^2+(1+x)\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^4}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x+5}{(\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1-x})[(1+x)^2+(1+x)\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^4}}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ dır.}$$

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt[3]{4x^6+3x-2}}$ *limitini hesaplayınız*

$\dfrac{\infty}{\infty}$ şeklinde olup:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt[3]{4x^6+3x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{5}{x^2}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{4+\dfrac{3}{x^5}-\dfrac{2}{x^6}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \text{ dir.}$$

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x}-2}{\sqrt[3]{4-x}+\sqrt[3]{3}}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 belirsiz şeklinde olup:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x}-2}{\sqrt[3]{4-x}-\sqrt[3]{3}} = \lim_{x\to 1} \frac{(7+x-8)[\sqrt[3]{(4-x)^2}+\sqrt[3]{3(4-x)}+\sqrt[3]{3^2}]}{(4-x-3)[\sqrt[3]{(7+x)^2}+\sqrt[3]{8(7+x)}+\sqrt[3]{8^2}]}$$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{\sqrt[3]{(4-x)^2}+\sqrt[3]{3(4-x)}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{(7+x)^2}+\sqrt[3]{8(7+x)}+\sqrt[3]{8^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{9}}{4} \text{ dir.}$$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}\,\sqrt[3]{1-x+x^2}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}\,\sqrt[3]{1-x+x^2}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}}$$

$=\frac{1}{3}$ dir.

15. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^4-x^3+5}}{\sqrt[6]{x^8-x^4+1}}$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde olup:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^4-x^3+5}}{\sqrt[6]{x^8-x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^4}}{\sqrt[6]{x^8}}=\sqrt[3]{2}\text{ dir.}$$

16. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$ *limitini hesaplayınız.*

$\infty-\infty$ şeklinde olup:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})=\lim_{x\to\infty}\left[|x-1|-\left|x-\frac{7}{2}\right|\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+1+x-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$$

ve

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1-x+\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\text{ dir.}$$

17. $\lim_{x\to\mp\infty}(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3})$ *limitini hesaplayınız.*

$\infty-\infty$ şeklinde olup:

$$\lim_{x\to\mp\infty}(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3})=\lim_{x\to\mp\infty}[(2x-1)-|2x-1|]$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3})=\lim_{x\to-\infty}(2x-1+2x-1)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(4x-2)=-\infty \qquad \text{ve}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3})=\lim_{x\to+\infty}(2x-1-2x+1)=0\text{ dır.}$$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+5x^2} - \sqrt[3]{x^3+8x})$ *limitini hesaplayınız.*

$\infty - \infty$ şeklinde olup:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+5x^2} - \sqrt[3]{x^3+8x})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x^2-x^3-8x}{\sqrt[3]{(x^3+5x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3+5x^2}\,\sqrt[3]{x^3+8x} + \sqrt[3]{(x^3+8x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(5-\frac{8}{x}\right)}{x^2\left[\sqrt[3]{1+\frac{5}{x}} + \sqrt[3]{1+\frac{5}{x}}\,\sqrt[3]{1+\frac{8}{x}} + \sqrt[3]{1+\frac{8}{x^2}}\right]}$$

$$= \frac{5}{1+1+1} = \frac{5}{3} \text{ dür.}$$

19. $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \frac{4+3^x}{1+5^x}$ *limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4+3^x}{1+5^x} = 4 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{4+3^x}{1+5^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4}{5^x}+\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\frac{1}{5^x}+1} = 0 \text{ dır.}$$

20. $y = \dfrac{2^{\frac{1}{x-3}}+1}{2^{\frac{1}{x-3}}-1}$ *fonksiyonunun* $x \to 3$ *halinde sağdan ve soldan limitlerini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to3+0} \frac{2^{\frac{1}{x-3}}+1}{2^{\frac{1}{x-3}}-1} = \lim_{x\to3+0} \frac{1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-3}}}}{1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-3}}}} = 1 \quad \text{ve}$$

$$\lim_{x\to3-0} \frac{2^{\frac{1}{x-3}}+1}{2^{\frac{1}{x-3}}-1} = -1 \text{ dir.}$$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ *limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x . \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1\times 1 = 1$$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ *limitini hesaplayınız.*

$\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\sin x}{\sin x}\cos x = \cos x$ olarak $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ dir.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ *limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2 \quad \text{dir.}$$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos x = 2\sqrt{2} \text{ dir.}$$

25. $\lim\limits_{A\to 0}\dfrac{1-\cos nA}{A^2}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup:

$$\lim_{A\to 0}\frac{1-\cos nA}{A^2}=\lim_{A\to 0}\frac{2\sin^2\frac{nA}{2}}{A^2}=\lim_{A\to 0}\frac{n^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{nA}{2}}{\frac{nA}{2}}\right)^2=\frac{n^2}{2}$$

dir.

26. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}\,\frac{mx}{\frac{\sin nx}{nx}\,nx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}}=\frac{m}{n}\ \text{dir.}$$

27. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}$ *limitini hesaplayınız.*

0/0 şeklinde olup :

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\ \text{dir.}$$

28. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{0}{0}$ şekilinde olup :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-\sqrt{\cos 2x})(\cos x+\sqrt{\cos 2x})}{\sin^2 x\,(\cos x+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos 2x}{\sin^2 x\,(\cos x+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 2\cos^2 x + 1}{\sin^2 x(\cos x + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x(\cos x + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{2}$$

dır.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

29. $\lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$ Cevap : 80

30. $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 7x + 10}$ Cevap : $\frac{10}{3}$

31. $\lim_{x\to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a}$ Cevap : $\frac{1}{3a^{2/3}}$

32. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{n}$ Cevap : 0

33. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$ Cevap : $\frac{1}{2}$

34. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ Cevap : 0

35. $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ Cevap : $\cos a$

36. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{5 + \sin x}$ Cevap : $\frac{1}{5}$

37. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x)}{\cos x}$ Cevap : 0

38. $\lim_{x\to 1} [10^x - \log_{10}(9+x)]$ Cevap : 9

39. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}$ Cevap : 1

40. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-1}{4x^2+3}$ Cevap : $\frac{3}{4}$

41. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 9x^2}}{\sqrt[3]{(8+x)^2}}$ Cevap : $\frac{1}{4}$

42. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-1}{x-3}$ Cevap : ∞

43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos \dfrac{x}{2}}$ Cevap : 4

44. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$ Cevap : 6

45. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x}{x+y}\right]$ Cevap : 1

46. $\lim\limits_{y\to 0} \left[\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+y}\right]$ Cevap : 0

47. $\lim\limits_{h\to 0^+} 10^{1/h}$ Cevap : ∞

48. $\lim\limits_{h\to 0^-} 10^{1/h}$ Cevap : 0

49. $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2^{1/h}}{1+2^{1/h}}$ Cevap : 1

50. $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{2^{1/h}}{1+2^{1/h}}$ Cevap : 0

51. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3^{1/h}}{5+4^{1/h}}$ Cevap : 0

52. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{3x+\sqrt[3]{x^3+x}}$

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}+1}{x}$

54. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{4+x}-\sqrt{9+x}}{x}$

55. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^3-1}\right]$

56. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)$

57. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{x-1}$

58. $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sqrt{2}\sin t}{\cos 2t}$

59. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x + \sin 2x}{\cos 3x - \cos 2x}$

60. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 3x}$

61. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$ **Cevap :** $-\dfrac{1}{3}$

62. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - \sqrt{2x + 8}}{\sqrt{x+21} - \sqrt{5x+5}}$

63. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$ **Cevap :** $\dfrac{3}{8}$

4. TÜREV

1. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-2/3} \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{3(x^2-1)^{2/3}(x^2+1)^{4/3}}$$

2. $y = \sqrt{R^2+\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$ *den $\dfrac{dy}{dC}$ türevini hesaplayınız.*

$$\frac{dy}{dC} = \frac{2\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)\cdot\dfrac{1}{C^2\omega}}{2\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{\dfrac{1}{C^2\omega}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\frac{dy}{dC} = \frac{LC\omega^2-1}{C^3\omega^2\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

3. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{3x}\left(\dfrac{1}{x^2}+2\right)$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\dfrac{3x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 3\sqrt{x^2-1}}{9x^2}\left(\frac{1}{x^2}+2\right) - \frac{2\sqrt{x^2-1}}{3x^4} = \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}$$

4. $y = (2x-3)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = 2\sqrt[3]{(x+1)^2} + \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(2x-3) = \frac{10x}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

5. $y = \sqrt{x^2-2x}\,\sqrt[3]{x^3-3x}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\sqrt[3]{x^3-3x} + \frac{1}{3}(x^3-3x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-3)\sqrt{x^2-2x}$$

$$y' = \frac{(x^2-x)(2x^2-x-5)}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}\sqrt{x^2-2x}}$$

6 $y = (3x-4)\sqrt[4]{(x+1)^3}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = 3\sqrt[4]{(x+1)^3} + \frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{1}{4}}(3x-4) = 3\sqrt[4]{(x+1)^3} + \frac{3(3x-4)}{4\sqrt[4]{x+1}}$$

$$y' = \frac{12(x+1)+3(3x-4)}{4\sqrt[4]{x+1}} = \frac{21x}{4\sqrt[4]{x+1}}$$

7. $y = x^3\sqrt[3]{(8-x^3)^2}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = 3x^2\sqrt[3]{(8-x^3)^2} + \frac{2}{3}x^3(8-x^3)^{-\frac{1}{3}}(-3x^2) = \frac{24x^2-5x^5}{\sqrt[3]{8-x^3}}$$

8. $y = (5x^2-6x+9)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = (10x-6)\sqrt[3]{(x+1)^2} + \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(5x^2-6x+9) = \frac{40x^2}{3\sqrt[3]{(x+1)}}$$

9. $y = (21x^2-24x+32)\sqrt[4]{(x+1)^3}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = (42x-24)\sqrt[4]{(x+1)^3} + \frac{3}{4}\frac{21x^2-24x+32}{\sqrt[4]{x+1}} = \frac{231x^2}{4\sqrt[4]{x+1}}$$

10. $y = \dfrac{x(3+2x^2)}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1}{3}\,\frac{(3+6x^2)\sqrt{(1+x^2)^3} - \dfrac{3x(1+x^2)^2(3x+2x^3)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{(1+2x^2)(1+x^2)^3 - x(1+x^2)^2(3x+2x^3)}{\sqrt{(1+x^2)^5}(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$$

11. $y = \dfrac{3x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$y = (3x^2-1)(x^3-1)^{-\frac{2}{3}}$ şeklinde yazılarak:

$$y' = 6x(x^3-1)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(3x^2-1)(x^3-1)^{-\frac{5}{3}}3x^2$$

$$= \frac{6x}{(x^3-1)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2x^2(3x^2-1)}{(x^3-1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{6x(x^3-1)-2x^2(3x^2-1)}{(x^3-1)^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \frac{2x(x-3)}{(x^3-1)^{\frac{5}{3}}}$$ bulunur.

12. $y = \frac{1}{2}(\sec 2x + \operatorname{tg} 2x)$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1}{2}(2\sec 2x \operatorname{tg} 2x + 2\sec^2 2x) = \sec 2x(\operatorname{tg} 2x + \sec 2x)$$

13. $y = \sin x \cos x(2\cos^2 x + 3) + 3x$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \cos^2 x(2\cos^2 x + 3) - \sin^2 x(2\cos^2 x + 3) - 4\sin^2 x\cos^2 x + 3$$
$$= 8\cos^4 x$$

14. $y = \frac{3}{14}\sqrt[3]{\cos 2x}\,(\cos^2 2x - 7)$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = -\frac{1}{7}\sin 2x(\cos 2x)^{-\frac{2}{3}}(\cos^2 2x - 7) - \frac{6}{7}\sqrt[3]{\cos 2x}\cos 2x \sin 2x$$
$$= \frac{\sin^3 2x}{\cos^{2/3} 2x}$$

15. $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{\cos^3 \frac{1}{x}}}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y = \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{5}} \text{ yazarak :}$$

$$y' = -\frac{3}{5}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{-\frac{8}{5}}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{5x^2}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{-\frac{8}{5}}\sin\frac{1}{x}$$

$$= \frac{-3\sin\frac{1}{x}}{5x^2\sqrt[5]{\cos^8\frac{1}{x}}} = \frac{-3\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{5x^2\sqrt[5]{\cos^3\frac{1}{x}}} \quad \text{bulunur.}$$

16. $y = \frac{\sin x}{5}\left[\frac{1}{\cos^5 x} + \frac{4}{3\cos^3 x}\right] + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\cos x}{5}\left[\frac{1}{\cos^5 x} + \frac{4}{3\cos^3 x}\right] + \frac{\sin x}{5}\left[\frac{5\cos^4 x \sin x}{\cos^{10} x} + \frac{4\cos^2 x\sin x}{\cos^6 x}\right] + \frac{8}{15\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{1}{5\cos^4 x} + \frac{4}{15\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} + \frac{4\sin^2 x}{5\cos^4 x} + \frac{8}{15\cos^2 x}$$

$$= \frac{3\cos^2 x + 12\cos^4 x + 15\sin^2 x + 12\sin^2 x\cos^2 x}{15\cos^6 x}$$

$$= \frac{3(\cos^2 x + \sin^2 x) + 12\sin^2 x + 12\cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{15\cos^6 x}$$

$$= \frac{3 + 12\sin^2 x + 12\cos^2 x}{15\cos^6 x} = \frac{1}{\cos^6 x}$$

17. $(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *den* y' *türevini hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevlerini eşitleyerek :

$$\frac{2}{3}(x + y)^{-\frac{1}{3}}(1 + y') + \frac{2}{3}(x - y)^{-\frac{1}{3}}(1 - y') = 0$$

elde edilip buradan

$$y' = \frac{(x + y)^{\frac{1}{3}} + (1 - y)^{\frac{1}{3}}}{(x + y)^{\frac{1}{3}} - (1 - y)^{\frac{1}{3}}} \quad \text{bulunur.}$$

18. $\cos(3x + y) + \sin(x + 3y) = \frac{1}{2}$ *den* y' *türevini hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevlerini eşitleyerek :

$$-(3 + y')\sin(3x + y) + (1 + 3y')\cos(x + 3y) = 0 \quad \text{ve}$$

$$y' = \frac{3\sin(3x + y) - \cos(x + 3y)}{\sin(3x + y) + 3\cos(x + 3y)} \quad \text{bulunur.}$$

19. $x^2 - xy + y^2 = 3$ *den* y' *ve* y'' *türevlerini hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevlerini eşitleyerek :

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \quad \text{ve} \quad y' = \frac{2x - y}{x - 2y} \quad \text{bulunur.}$$

y' türevinin bir daha türevi alınarak :

$$y'' = \frac{(2 - y')(x - 2y) - (1 - 2y')(2x - y)}{(x - 2y)^2} = \frac{3xy' - 3y}{(x - 2y)^2}$$

ve y' yerine değeri konursa :

$$y'' = \frac{3x \cdot \frac{2x - y}{x - 2y} - 3y}{(x - 2y)^2} = \frac{3x(2x - y) - 3y(x - 2y)}{(x - 2y)^3} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3}$$

ve $x^2 - xy + y^2 = 3$ olduğu göz önüne alınırsa:

$$y'' = \frac{18}{(x-2y)^3} \quad \text{bulunur.}$$

20. *$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ den y'' türevini hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevlerini eşitleyerek:

$$2b^2x + 2a^2y\,y' = 0 \qquad y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad \text{ve buradan da;}$$

$$y'' = -\frac{a^2b^2y - a^2b^2xy'}{a^4y^2} = -\frac{a^2b^2y - a^2b^2x(-b^2x/a^2y)}{a^4y^2}$$

$$= -\frac{a^2b^2y^2 + b^4x^2}{a^4y^3} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} \quad \text{elde edilir.}$$

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ olduğu da göz önüne alınırsa:

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \quad \text{bulunur.}$$

21. *$(x+y)^2 = 16(x-y)$ den y' ve y'' türevlerini hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevlerini eşitleyerek:

$$2(x+y)(1+y') = 16(1-y'), \qquad y' = \frac{8-x-y}{8+x+y}$$

ve buradan da:

$$y'' = \frac{(-1-y')(8+x+y)-(1+y')(8-x-y)}{(8+x+y)^2}$$

$$y'' = \frac{(1+y')(-8-x-y-8+x+y)}{(8+x+y)^2} = \frac{-16(1+y')}{(8+x+y)^2}$$

elde edilir. y' yerine de yukarıda bulunan ifadesi konursa:

$$y'' = -\frac{256}{(8+x+y)^3} \quad \text{bulunur.}$$

22. *$x^4 + 2x^2y^2 = a^4$ den y'' yü hesaplayınız.*

$$4x^3 + 4xy^2 + 4x^2y\,y' = 0 \quad \text{ve} \quad y' = -\frac{x^2+y^2}{xy} \quad \text{olup buradan:}$$

$$y' = -\frac{(2x+2yy')xy-(y+xy')(x^2+y^2)}{x^2y^2}$$

$$= -\frac{x^2y + xy^2y' - y^3 - x^3y'}{x^2y^2} = \frac{(x^3 - xy^2)y' + y^3 - x^2y}{x^2y^2}$$

$$= \frac{(x^2 - y^2)(xy' - y)}{x^2y^2}$$

elde edilir ve y' nün değeri yerine konursa

$$y'' = \frac{(x^2-y^2)\left(-\dfrac{x^2+y^2}{y} - y\right)}{x^2y^2} = \frac{(x^2-y^2)(-x^2-2y^2)}{x^2y^3}$$

$$= \frac{(y^2-x^2)(x^2+2y^2)}{x^2y^3}$$

bulunur. Başta verilen: $x^4 + 2x^2y^2 = a^4$ ifadesinden:

$$x^2 + 2y^2 = \frac{a^4}{x^2}$$

olduğu göz önünde tutulursa:

$$y'' = \frac{a^4(y^2 - x^2)}{x^4y^3} \text{ elde edilmiş olur.}$$

23. $\dfrac{y}{x} + \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = 2$ *den* y'' *türevini hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevlerinin eşitlenmesinden:

$$\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{1}{3}\,\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,\frac{y - xy'}{y^2} = 0$$

$$3y^2(xy' - y) + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}(y - xy') = 0$$

$$3xy^2y' - 3y^3 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{2}{3}}y' = 0$$

$$(3xy^2 - x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{2}{3}})\,y' = 3y^3 - x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{3}}$$

$$y' = \frac{y^{\frac{5}{3}}(3y^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{4}{3}})}{xy^{\frac{2}{3}}(3y^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{4}{3}})} = \frac{y}{x} \quad \text{ve} \quad y'' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x\cdot\dfrac{y}{x} - y}{x^2} = 0$$

elde edilir.

24. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ *den* y'' *yü hesaplayınız.*

$2ax + 2hy + 2hxy' + 2byy' = 0$ ve $y' = -\dfrac{ax+hy}{hx+by}$ olup

$$y'' = -\frac{(a+hy')(hx+by) - (h+by')(ax+hy)}{(hx+by)^2}$$

$$= -\frac{aby - h^2y - (abx - h^2x)y'}{(hx+by)^2}$$

elde edilir. y' yerine yukarıda bulunan değeri konursa:

$$y'' = \frac{(h^2-ab)y + (h^2-ab)x\,\dfrac{ax+hy}{hx+by}}{(hx+by)^2}$$

$$= \frac{(h^2-ab)\,[y(hx+by) + x(ax+hy)]}{(hx+by)^3} = \frac{(h^2-ab)(ax^2+2hxy+by^2)}{(hx+by)^3}$$

ve $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ olduğu göz önünde tutulursa:

$$y'' = \frac{h^2-ab}{(hx+by)^3} \quad \text{bulunur.}$$

25. $y^3 = a(x^2+y^2)$ *den* y'' *yü hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevleri eşitlenirse:

$$3y^2y' = 2ax + 2ayy', \quad y' = \frac{2ax}{3y^2-2ay} \quad \text{ve}$$

$$y'' = \frac{2a(3y^2-2ay) - 2ax(6yy'-2ay')}{(3y^2-2ay)^2}$$

elde edilir. y' yerine bulunan değeri konursa:

$$y'' = \frac{2a(3y^2-2ay) - 2ax(6y-2a)\,\dfrac{2ax}{3y^2-2ay}}{(3y^2-2ay)^2}$$

$$= 2a.\,\frac{(3y^2-2ay)^2 - 4ax^2(3y-a)}{(3y^2-2ay)^3}$$

bulunur. Diğer taraftan $ax^2 = y^3 - ay^2$ olduğu göz önüne alınırsa:

$$y'' = \frac{2ay^3(4a-3y)}{(3y^2-2ay)^3} = \frac{2a(4a-3y)}{(3y-2a)^3} \quad \text{sonucuna varılır.}$$

26. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *den* y'' *yü hesaplayınız.*

Her iki tarafın türevlerini eşitleyerek :

$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'=0$, $y'=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$ bulunur. Buradan da

$$y''=-\frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}y'-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{2/3}}$$

elde edilip y' nün bulunan değeri yerine konursa :

$$y''=\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3}+\frac{1}{3}x^{1/3}y^{-2/3}\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}}{x^{2/3}}=\frac{\frac{y^{1/3}}{3x^{2/3}}+\frac{1}{3y^{1/3}}}{x^{2/3}}$$

$$y''=\frac{y^{2/3}+x^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}$$

ve $y^{2/3}+x^{2/3}=a^{2/3}$ olduğu gözönüne alınırsa:

$$y''=\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}$$ elde edilir.

27. $y=-\frac{1}{2}(x+3a)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3a^2}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{x-a}{a}$ *dan* y' *türevini hesaplayınız.*

$$y'=-\frac{1}{2}\sqrt{2ax-x^2}-\frac{1}{2}(x+3a)\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}+\frac{3a^2}{2}\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$$ dir.

28. $y=x^2+(\operatorname{Arcsin}x-2x\sqrt{1-x^2})\operatorname{Arc\,sin}x$ *den* y' *türevini hesaplayınız.*

$$y'=2x+\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2\sqrt{1-x^2}+\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right].\operatorname{Arc\,sin}x+\frac{\operatorname{Arcsin}x-2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=2x+\frac{1-2(1-x^2)+2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arcsin}x+\frac{\operatorname{Arcsin}x}{\sqrt{1-x^2}}-2x$$

$$=\frac{4x^2\operatorname{Arc\,sin}x}{\sqrt{1-x^2}}$$ dir.

29. $y = \frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2}\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x-3}{3}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{6x-x^2} + \frac{(x-3)(6-2x)}{4\sqrt{6x-x^2}} + \frac{9}{2}\,\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{6x-x^2}$$

30. $y = x\sqrt{(9-x^2)^3} + \frac{27x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{243}{2}\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{3}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \sqrt{(9-x^2)^3} - 3x^2\sqrt{9-x^2} + \frac{27}{2}\sqrt{9-x^2} - \frac{27x}{2}\,\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{243}{2}\;\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$$

$$y' = 4(9-x^2)^{3/2}$$

31. $y = e^{\sin^2 2x}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = 4\sin 2x\cos 2x\, e^{\sin^2 2x} = 2\sin 4x\, e^{\sin^2 2x}$$

32. $y = e^{-2x}\sin 3x$ *den y' ve y'' türevlerini hesaplayınız.*

$y' = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\sin 3x = e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$ ve

$y'' = e^{-2x}(-9\sin 3x - 6\cos 3x) - 2e^{-2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$

$y'' = -e^{-2x}(12\cos 3x + 5\sin 3x)$ dir.

33. $y = 2e^{\sqrt{x}}(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)$ *dan y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6) + 2e^{\sqrt{x}}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= x e^{\sqrt{x}}$$

34. $y = \sqrt{\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\frac{a e^{ax}(e^{ax}+1) - a e^{ax}(e^{ax}-1)}{(e^{ax}+1)^2}}{2\sqrt{\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}}} = \frac{a e^{ax}}{(e^{ax}+1)\sqrt{e^{2ax}-1}}$$

35. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} e^{Arctg x}$ *den* y' *türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{1+x^2} e^{\text{Arctg } x} + \frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} e^{\text{Arctg } x}$$

$$y' = \frac{2\, e^{\text{Arctg } x}}{(1+x^2)^{3/2}}$$

36. $y = Arcsin \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$ *den* y' *türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\dfrac{2(e^{2x} + e^{-2x})^2 - 2(e^{2x} - e^{-2x})^2}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\right)^2}} = \frac{\dfrac{8}{(e^{2x} + e^{-2x})^2}}{\dfrac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}}$$

$$y' = \frac{4}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

37. $y = \dfrac{1}{2} Arctg\, e^x - \dfrac{e^x}{2(e^{2x} + 1)}$ *den* y' *türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1}{2} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{e^x(e^{2x} + 1) - 2e^{2x} e^x}{2(e^{2x} + 1)^2}$$

$$y' = \frac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x(e^{2x} + 1) + 2e^{3x}}{2(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

38. $y = Arctg \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin x}{b + a \cos x}$ *den* y' *türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos x\,(b + a \cos x) + a\sqrt{a^2 - b^2} \sin^2 x}{(b + a \cos x)^2}}{1 + \dfrac{(a^2 - b^2)\sin^2 x}{(b + a \cos x)^2}}$$

$$= \frac{b\sqrt{a^2 - b^2} \cos x + a\sqrt{a^2 - b^2} \cos^2 x + a\sqrt{a^2 - b^2} \sin^2 x}{b^2 + 2ab \cos x + a^2 \cos^2 x + a^2 \sin^2 x - b^2 \sin^2 x}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,(b \cos x + a)}{(b \cos x + a)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b \cos x + a}$$

39. $y = \log \sqrt[5]{\dfrac{(1-x^2)^3}{(1+x^2)^4}}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y = \frac{3}{5} \log (1-x^2) - \frac{4}{5} \log (1+x^2) \quad \text{olup}$$

$$y' = \frac{3}{5} \frac{-2x}{1-x^2} - \frac{4}{5} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(x^2-7)}{5(1-x^4)}$$

40. $y = \dfrac{x \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} + \log \sqrt{1-x^2}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\left(\operatorname{Arcsin} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2 \operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}$$

$$y' = \frac{(\sqrt{1-x^2} \operatorname{Arcsin} x + x)\sqrt{1-x^2} + x^2 \operatorname{Arcsin} x}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{x}{1-x^2}$$

$$y' = \frac{(1-x^2) \operatorname{Arcsin} x + x\sqrt{1-x^2} + x^2 \operatorname{Arcsin} x - x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$y' = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

41. $y = \dfrac{2}{\sin^2 x \cos x} - \dfrac{3\cos x}{\sin^2 x} + 3 \log \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = -\frac{2(2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x)}{\sin^4 x \cos^2 x} - \frac{-3\sin^3 x - 6\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} + \frac{\dfrac{3}{2\cos^2 \dfrac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}}$$

$$y' = \frac{2}{\sin^3 x \cos^2 x}$$

42. $y = \dfrac{1}{8} \log \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} - \dfrac{\cos 2x}{4\sin^2 2x}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{1}{8} \frac{\dfrac{2\sin 2x(1+\cos 2x) + 2\sin 2x(1-\cos 2x)}{(1+\cos 2x)^2}}{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}} - $$

$$\frac{1}{4} \frac{-2\sin 2x \sin^2 2x - 4\sin 2x \cos^2 2x}{\sin^4 2x}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{4\sin 2x}{1-\cos^2 2x} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 2x + 2\cos^2 2x}{\sin^3 2x}$$

$$= \frac{1}{2\sin 2x} + \frac{2-\sin^2 2x}{2\sin^3 2x} = \frac{\sin^2 2x + 2 - \sin^2 2x}{2\sin^3 2x} = \frac{1}{\sin^3 2x} = \operatorname{cosec}^3 2x$$

43. *$y = (e^x - 1)\,\mathrm{Arc\,tg}\,(e^x - 1) - \log\sqrt{2 - 2e^x + e^{2x}}$ den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = e^x \,\mathrm{Arctg}\,(e^x - 1) + \frac{e^x(e^x-1)}{1+(e^x-1)^2} - \frac{-e^x + e^{2x}}{2 - 2e^x + e^{2x}}$$

$$y' = e^x \,\mathrm{Arctg}\,(e^x - 1) + \frac{e^x(e^x-1)}{2-2e^x+e^{2x}} - \frac{e^x(e^x-1)}{2-2e^x+e^{2x}} = e^x \,\mathrm{Arctg}\,(e^x - 1)$$

44. *$y = \log(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}) - \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{x^2}$ den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{2x + \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}}{x^2 + \sqrt{x^4-1}} + \frac{-\dfrac{2}{x^3}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^4}}} = \frac{2x(\sqrt{x^4-1} + x^2)}{(x^2 + \sqrt{x^4-1})\sqrt{x^4-1}} - \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}} - \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{2(x^2-1)}{x\sqrt{x^4-1}}$$

45. *$y = \frac{2\,\mathrm{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\frac{1-x}{1+x}$ den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2} - \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,2\,\mathrm{Arcsin}\,x}{1-x^2} + \frac{\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\dfrac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{1-x^2} + 2x\,\mathrm{Arcsin}\,x}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{2x\,\mathrm{Arcsin}\,x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

46. *$y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\log \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{-\sin^3 x - 2\sin x\cos^2 x}{2\sin^4 x} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$$

$$= -\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x} - \frac{1}{2\sin x} = \frac{-1-\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin^3 x} = -\frac{1}{\sin^3 x}$$

47. $y = log \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} - Arctg \frac{a}{x}$ *den y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{\frac{x+a-x+a}{2(x+a)^2\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}}{\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} - \frac{-\frac{a}{x^2}}{1+\frac{a^2}{x^2}} = \frac{a}{x^2-a^2} + \frac{a}{x^2+a^2} = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}$$

48. $y = log(x^2 + 2ax + 3a^2) - \frac{2a+3}{\sqrt{2}\,a} Arctg \frac{x+a}{\sqrt{2}\,a}$ *dan y' türevini hesaplayınız.*

$$y' = \frac{2x+2a}{x^2+2ax+3a^2} - \frac{2a+3}{\sqrt{2}\,a} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}\,a}}{1+\left(\frac{x+a}{\sqrt{2}\,a}\right)^2} = \frac{2x-3}{x^2+2ax+3a^2}$$

49. $f(x) = e^{1/x} log \frac{1}{x}$ *olduğuna göre f'(1) ve f''(1) i hesaplayınız.*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} \log \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} e^{1/x} = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} \log \frac{1}{x} - \frac{1}{x} e^{1/x}$$

olarak

$f'(1) = -1 . e . \log 1 - 1 . e = -e$ ve

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} e^{1/x} \log \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2} e^{1/x} \log \frac{1}{x} - \frac{1}{x} e^{1/x}\right) + \frac{1}{x^2} e^{1/x} + \frac{1}{x^3} e^{1/x}$$

$$= \frac{1}{x^4} e^{1/x} \log \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} e^{1/x} \log \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} e^{1/x} + \frac{1}{x^2} e^{1/x}$$

$$= \frac{e^{1/x}}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} \log \frac{1}{x} + \frac{2}{x} \log \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + 1\right) \quad \text{olarak}$$

$f''(1) = \frac{e}{1}(1.\log 1 + 2.\log 1 + 2 + 1) = 3e$ bulunur.

50. $y = (a^2 + x^2)^{Arctg \frac{x}{a}}$ *dan y' türevini hesaplayınız.*

$y = (a^2 + x^2)^{\text{Arctg} \frac{x}{a}}$ dan $\log y = \text{Arctg} \frac{x}{a} \log (a^2+x^2)$ yazılarak

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{a^2+x^2} \text{Arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{a^2+x^2} \log (a^2+x^2)$$

$$y' = \frac{(a^2+x^2)^{\mathrm{Arctg}\frac{x}{a}}}{a^2+x^2}\left[2x\ \mathrm{Arctg}\ \frac{x}{a} + a\log(a^2+x^2)\right] \text{ bulunur.}$$

51. *$y = (5\cos 2x^4)^x$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.*

$\log y = x\ \log(5\ \cos 2x^4)$ yazarak:

$$\frac{y'}{y} = \frac{-40\ x^4 \sin 2x^4}{5\cos 2x^4} + \log(5\cos 2x^4) \quad \text{ve}$$

$$y' = (5\cos 2x^4)^x\left[\log(5\cos 2x^4) - 8x^4\,\mathrm{tg}\,2x^4\right] \text{ bulunur.}$$

52. *$y = x^{x^x}$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.*

$\log\ y = x^x \log x$ yazalım ve her iki tarafın türevlerini eşitleyebilmek üzere x^x in türevini hesaplıyalım:

$$z = x^x \text{ yazılarak } \log z = x\log x \text{ den } \frac{z'}{z} = 1 + \log x \quad \text{ve}$$

$$z' = x^x(1+\log x) \text{ bulunur. Buna göre:}$$

$$\frac{y'}{y} = x^x(1+\log x)\log x + \frac{x^x}{x} \quad \text{ve}$$

$$y' = x^{x^x}x^x\left(\frac{1}{x} + \log x + \log^2 x\right) \text{ bulunur.}$$

53. *$y = (tg\ x)^{\log x}$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.*

$\log y = \log x \log(\mathrm{tg}\ x)$ yazılarak buradan:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\log(\mathrm{tg}\ x)}{x} + \frac{\log x}{\sin x\cos x} \quad \text{ve}$$

$$y' = (\mathrm{tg}\ x)^{\log x}\left[\frac{\log(\mathrm{tg}\ x)}{x} + \frac{\log x}{\sin x\cos x}\right] \text{ bulunur.}$$

54. *$\mathrm{Arctg}\frac{x}{y} + \log\sqrt{x^2+y^2} = 0$ dan y' ve y'' türevlerini hesaplayınız.*

$$\frac{\frac{y-xy'}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} + \frac{\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\ , \quad \frac{y-xy'}{x^2+y^2} + \frac{x+yy'}{x^2+y^2} = 0$$

$$x + y - (x-y)y' = 0 \qquad y' = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{ve}$$

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x-y+(x-y)y' - (x+y) + (x+y)y'}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2} = \frac{-2y+2x\dfrac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2} = \frac{-2xy+2y^2+2x^2+2xy}{(x-y)^3}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

55. $y=(ax^2+b)(cx^2+d)$ — **Cevap:** $y'=4acx^3+2(ad+bc)x$

56. $y=\dfrac{x^3+1}{x^3+3}$ — **Cevap:** $y'=\dfrac{6x^2}{(x^3+3)^2}$

57. $y=(x^3-1)(x-2\sqrt{x})$ — **Cevap:** $y'=4x^3-1+\dfrac{1-7x^3}{\sqrt{x}}$

58. $y=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ — **Cevap:** $y'=\dfrac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}$

59. $y=\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{x}}}$ — **Cevap:** $y'=\dfrac{-15}{(11x+10)^2}$

60. $y=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ — **Cevap:** $y'=\begin{vmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1' & v_2' & v_3' \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1' & w_2' & w_3' \end{vmatrix}$

61. $y=\dfrac{1}{\sqrt{8x-2x^3}}$ — **Cevap:** $y'=\dfrac{3x^2-4}{(8x-2x^3)^{3/2}}$

62. $y=x(x^8+12)^{10}$ — **Cevap:** $y'=(x^8+12)^9(81x^8+12)$

63. $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ — **Cevap:** $y'=\dfrac{-1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

64. $y=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ — **Cevap:** $y'=\dfrac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

65. $f(x)=\left[\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+7}+(5\sqrt{x}-9)^5}{(x^2-3x-2)(\sqrt{2x+1}-1)}\right]^{\frac{16}{17}}$ — **Cevap:** $f'(4)=-\dfrac{25}{27}$

66. $y=\dfrac{\sin x}{a+b\cos x}$ — **Cevap:** $y'=\dfrac{b+a\cos x}{(a+b\cos x)^2}$

67. $f(\theta)=\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ — **Cevap:** $f'(\theta)=\dfrac{-k^2\sin 2\theta}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$

68. $y=\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ — **Cevap:** $y'=2\,\text{tg}\,x\sec^2 x$

69. $y = \dfrac{1}{(\cos 2x - \sin 2x)^2}$ Cevap : $y' = \dfrac{4\cos 4x}{(1-\sin 4x)^2}$

70. $y = \operatorname{cosec} x$ Cevap : $y'' = 2\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x$

71. $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ Cevap : $y'' = -\dfrac{1}{x^3} \sin \dfrac{1}{x}$

72. $f(\theta) = \left[\dfrac{2\sin^2\theta - \operatorname{tg} 3\theta}{(1+\cos 2\theta)\sqrt{2+\sec^2\theta}}\right]^{-6}$ Cevap : $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 3$

73. $y = \operatorname{Arcsin} \dfrac{x-1}{3}$ Cevap : $y' = \dfrac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

74. $y = \operatorname{Arctg} \dfrac{\sqrt{ax-b^2}}{b}$ Cevap : $y' = \dfrac{b}{2x\sqrt{ax-b^2}}$

75. $\operatorname{Arctg} \dfrac{4\sin x}{3+5\ \ \mathrm{os}\, x}$ Cevap : $y' = \dfrac{4}{5+3\cos x}$

76. $y = \operatorname{Arcsin} \dfrac{3+5\cos x}{5+3\cos x}$ Cevap : $y' = \dfrac{-4}{5+3\cos x}$

77. $y = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{tg} x)$ Cevap : $y' = \dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$

78. $y = \dfrac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{\operatorname{Arccos}\sqrt{x}}$ Cevap : $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\left[\dfrac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x} + \operatorname{Arccos}\sqrt{x}}{(\operatorname{Arccos}\sqrt{x})^2}\right]$

79. $y = \dfrac{1}{a^2-b^2}\left[\dfrac{a\sin x}{a+b\cos x} - \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arctg} \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\sin x}{b+a\cos x}\right]$

80. $y = \dfrac{1}{a^2-b^2}\left[\dfrac{a\sin x}{a+b\cos x} - \dfrac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arctg}\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)\right]$

81. $y = \dfrac{1}{a^2-b^2}\left[\dfrac{a\sin x}{a+b\cos x} - \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)\right]$

82. $y = \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{x}$

83. $y = \operatorname{Arctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

84. $y = \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

85. $y = \operatorname{Arctg} \dfrac{\cos x + 2\sin x}{\sin x - 2\cos x}$

86. $y = \operatorname{Arctg} \dfrac{x+2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-2x}$

87. $y = \dfrac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3\operatorname{Arcsin} \dfrac{1-3x}{6x}$ Cevap : $y' = \dfrac{1}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}$

88. $y = x\left(\operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{4-x^2} \cdot \operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2}$ Cevap : $y' = \left(\operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{2}\right)^2$

89. $y = \text{Arccos}\,\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

90. $y = \text{Arctg}\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

91. $y = e^x \log x$ Cevap: $y' = e^x\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right)$

92. $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ Cevap: $y' = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

93. $y = \log\dfrac{e^x}{1 + x + e^{-x}}$ Cevap: $y' = \dfrac{x + 2e^{-x}}{1 + x + e^{-x}}$

94. $y = x^x$ Cevap: $y' = x^x(1 + \log x)$

95. $y = e^{x^x}$ Cevap: $y' = e^{x^x}\, x^x(1 + \log x)$

96. $y = x^{x^2}$ Cevap: $y' = x^{x^2+1}(1 + 2\log x)$

97. $y = x^{\log\sqrt{x}}$ Cevap: $y' = \dfrac{\log x}{x}\, x^{\log\sqrt{x}}$

98. $y = (e^x)^{e^x}$ Cevap: $y' = e^x (e^x)^{e^x}(1 + x)$

99. $y = (\sin x)^{e^x}$ Cevap: $y' = (\sin x)^{e^x} . e^x (\log \sin x + \text{cotg}\, x)$

100. $y = (\text{tg}\, 5x^2)^{x^3}$ Cevap: $y' = x^2(\text{tg}\, 5x^2)^{x^3}\left[3\log \text{tg}\, 5x^2 + \dfrac{10x^2}{\sin 5x^2 \cos 5x^2}\right]$

101. $y = \log \text{Arcsin}\sqrt{x}$ Cevap: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}\,\text{Arcsin}\sqrt{x}}$

102. $y = \sin x$ Cevap: $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

103. $y = a^x$ Cevap: $y^{(n)} = (\log a)^n a^x$

104. $y = \cos ax$ Cevap: $y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

105. $y = e^x(\sin x + \cos x)$ Cevap: $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{4}\right)$

106. $y\sin x + x\cos y + x^2 - xy = 0$ Cevap: $y' = \dfrac{y - y\cos x - \cos y - 2x}{\sin x - x\sin y - x}$

107. $x\log y = e^x$ Cevap. $y' = \dfrac{y}{x}(e^x - \log y)$

108. $x^2 + 2xy + y^3 = 0$ Cevap: $y' = -\dfrac{2(x + y)}{x + 3y^2}$

109. $x^5 + 5x^4y - 10xy^4 + y^5 = 0$ Cevap: $y' = \dfrac{2y^4 - 4x^3y - x^4}{y^4 - 8xy^3 + x^4}$

110. $xy = (x + y)^2$ Cevap: $y' = -\dfrac{2x + y}{x + 2y}$

111. $(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=a^{2/3}$ Cevap: $y'=\dfrac{\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}}$

112. $3x^2+y^2=1$ Cevap: $y'=-\dfrac{3x}{y}$: $y''=-\dfrac{3}{y^3}$

113. $xy^2=x+y$ Cevap: $y'=\dfrac{1-y^2}{2xy-1}$, $y''=\dfrac{2(y^2-1)(4x+y)}{(2xy-1)^3}$

114. $2\log x+\left(\text{Arcsin}\dfrac{y}{x}\right)^2=e$ Cevap: $y'=\dfrac{y\,\text{Arcsin}\dfrac{y}{x}-\sqrt{x^2-y^2}}{x\,\text{Arcsin}\dfrac{y}{x}}$

115. $e^{x+y}=y^x$ Cevap: $y'=\dfrac{y^2}{x(y-x)}$; $y''=\dfrac{y^2(y-2x)}{x(y-x)^3}$

116. $x^3y+xy^3=2$ Cevap: $x=1$ için $y'=-1$ ve $y''=0$

117. $y=\text{Arctg}\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2+2x}}$ Cevap: $y'=\dfrac{(x+1)\log(x+1)}{(x^2+2x)^{3/2}}$

118. $y=2x\,\text{Ar tg}\,2x-\log\sqrt{1+4x^2}$ Cevap: $y'=2\,\text{Arctg}\,2x$

119. $y=\text{Arctg}\,a^x$ Cevap: $y'=\dfrac{a^x\log a}{1+a^{2x}}$

120. $y=\log\sqrt{2-2e^x+e^{2x}}+(e^x-1)\text{Arccotg}(e^x-1)$ Cevap: $y'=e^x\,\text{Arccotg}(e^x-1)$

121. $y=\log\dfrac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\,x}{1-x^2}-\text{Arcsin}\dfrac{\sqrt{2}\,x}{1+x^2}$

122. $y=\dfrac{1}{6}\log\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{Arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$ Cevap: $y'=\dfrac{1}{x^3+1}$

123. $y=\text{ch}(\log x)+\text{sh}(\log x)-x$ Cevap: $y'=0$

124. $\text{Arctg}\dfrac{y}{x}+xy=0$ Cevap: $y'=\dfrac{y(1-x^2-y^2)}{x(1+x^2+y^2)}$

125. $\text{Arcsin}\dfrac{x}{y}+\sqrt{y^2-x^2}=0$ Cevap: $y'=\dfrac{y(x-1)}{y^2-x}$

126. $\sin(x+2y)+e^{2x+y}=0$ Cevap: $y'=\dfrac{2\sin(x+2y)-\cos(x+2y)}{2\cos(x+2y)-\sin(x+2y)}$

127. $3^y\,2^x=\text{Arctg}\,y^2$

5. TÜREVİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

1. *$x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ eğrisinin herhangibir noktasındaki teğetinin eksenlerden ayırdığı parçaların toplamının sabit ve a ya eşit olduğunu gösteriniz.*

$$\frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{2}y^{-1/2}y'=0 \quad \text{ve} \quad y'=-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} \text{ olup eğrinin}$$

herhangibir (x_1, y_1) noktasındaki teğetinin denklemi:

$$y-y_1=-\frac{y_1^{1/2}}{x_1^{1/2}}(x-x_1) \quad \text{veya} \quad \frac{x}{a^{1/2}x_1^{1/2}}+\frac{y}{a^{1/2}y_1^{1/2}}=1$$

dir. Buna göre teğetin eksenlerden ayırdığı parçalar $a^{1/2}x_1^{1/2}$ ve $a^{1/2}y_1^{1/2}$ uzunluklarıdır. Bunların toplamı ise:

$$a^{1/2}x_1^{1/2}+a^{1/2}y_1^{1/2}=a^{1/2}(x_1^{1/2}+y_1^{1/2})=a^{1/2}a^{1/2}=a \quad \text{dır.}$$

2. *$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ eğrisinin herhangibir noktasındaki teğetinin eksenler arasında kalan parçasının sabit ve a ya eşit bir uzunlukta olduğunu gösteriniz.*

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'=0 \text{ ve } y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \text{ olup eğrinin her-}$$

hangibir (x_1,y_1) noktasındaki teğetinin denklemi:

$$y-y_1=-\sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}}(x-x_1)$$

dir. Bu tegetin eksenleri kestiği noktaların koordinatları:

Oy eksenini kestiği noktanın koordinatları $x=0,\ y=\sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}}x_1+y_1$

Ox » » » » $y=0,\ x=\sqrt[3]{\frac{x_1}{y_1}}y_1+x_1$

dir. Bu iki nokta arasındaki teğet parçasının uzunluğu ise:

$$d^2=\left(\sqrt[3]{\frac{y_1}{x_1}}x_1+y_1\right)^2+\left(\sqrt[3]{\frac{x_1}{y_1}}y_1+x_1\right)^2$$

$$=(y_1^{1/3}x_1^{2/3}+y_1)^2+(x_1^{1/3}y_1^{2/3}+x_1)^2$$

$$= y_1^{2/3}(x_1^{2/3} + y_1^{2/3})^2 + x_1^{2/3}(y_1^{2/3} + x_1^{2/3})^2$$

$$= (x_1^{2/3} + y_1^{2/3})^2 (x_1^{2/3} + y_1^{2/3}) = (x_1^{2/3} + y_1^{2/3})^3$$

ve $x_1^{2/3} + y_1^{2/3} = a^{2/3}$ olarak

$$d^2 = (a^{2/3})^3 = a^2 \quad \text{ve} \quad d = a \quad \text{bulunur.}$$

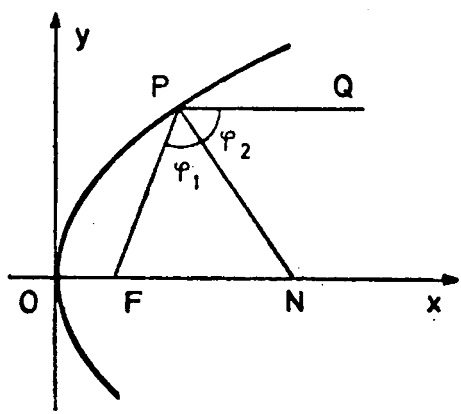
3. *$y^2 = 2px$ parabolunun $(a, \sqrt{2pa})$ noktasındaki normalinin, bu noktayı $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ odağına birleştiren doğru ile bu noktadan Ox eksenine çizilen paralel doğru arasındaki açıyı iki eşit kısma ayırdığını ispatlayınız.*

$2yy' = 2p$ ve $y' = \frac{p}{y}$ olup $(a, \sqrt{2pa})$ noktasındaki normalin eğimi $-\frac{\sqrt{2pa}}{p}$ ve bu noktadan Ox e çizilen paralelin eğimi de 0 dır. O halde normalle Ox e çizilen paralel arasındaki açı (şekil 42) :

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ formülünden

$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sqrt{2pa}}{p}$ olarak bulunur.

$(a, \sqrt{2pa})$ noktasını $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ odağına birleştiren doğrunun eğimi $\frac{\sqrt{2pa}}{a - \frac{p}{2}}$ olup bu doğru ile normal arasındaki φ_2 açısı :



Şekil 42

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-\frac{\sqrt{2pa}}{p} - \frac{\sqrt{2pa}}{a - \frac{p}{2}}}{1 - \frac{\sqrt{2pa}}{p}\,\frac{\sqrt{2pa}}{a - \frac{p}{2}}} = \frac{\sqrt{2pa}}{p}$$ ile belirlidir. Bunlardan :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \quad \text{ve} \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad \text{elde edilir.}$$

4. *a, b, c, d yi o şekilde belirtiniz ki $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ eğrisi (2, 3) noktasında $12x - y - 21 = 0$ doğrusuna ve (1, −3) noktasında $x - y - 4 = 0$ doğrusun teğet olsun.*

Eğri (2, 3) noktasında $12x - y - 21 = 0$ doğrusuna teğet ve (1, −3) noktasında $x - y - 4 = 0$ doğrusuna teğet olduğuna göre bu noktalarda türevin değerleri teğet doğruların eğimlerine eşit olmalıdır :

$12x - y - 21 = 0$ doğrusunun eğimi 12 ve $x - y - 4 = 0$ doğrusunun eğimi 1 ve

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \text{ olduğuna göre :}$$

$$12 = 12a + 4b + c$$

$$1 = 3a + 2b + c$$

dir. Bundan başka eğri (2, 3), (1, −3) noktalarından geçtiğine göre :

$$3 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$-3 = a + b + c + d$$

dir. Bu denklemlerden de $a = 1$, $b = 1$, $c = -4$ ve $d = -1$ bulunur.

5. *$y = (x - 2)(x + 1)^{1/3}$ eğrisinin maksimum, minimum ve büküm noktalarını bulunuz.*

$$y' = (x + 1)^{1/2} + \frac{1}{3}(x - 2)(x + 1)^{-2/3} = \frac{4x + 1}{3(x + 1)^{2/3}}$$

olup $x = -\frac{1}{4}$ için $y' = 0$ dır;

$$y'' = \frac{4}{3}(x + 1)^{2/3} - \frac{2}{9}(x + 1)^{-5/3}(4x + 1) = \frac{2}{9}\,\frac{2x + 5}{(x+1)^{5/3}}$$

olup $x = -\frac{1}{4}$ için $y'' > 0$ dir. Buna göre $x = -\frac{1}{4}$ minimuma karşılık olup $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$ minimum noktasıdır.

y'' ikinci türevi, $x = -\frac{5}{2}$ için işaret değiştirerek sıfır; $x = -1$ için ise, işaret değiştirerek sonsuza yaklaştığından bu değerler büküm noktalarının apsisleri olur.

6. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ *eğrisinin maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.*

$$y' = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2)^{-2/3}(3x^2 - 6x) = \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}} = \frac{x-2}{x^{1/3}\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

olup $x = 2$ için $y' = 0$ ve $x = 0$ için $y' \to \infty$ ve bu değerlerde türev işaret değiştirmektedir.

$x = 0$ için $y = 0$ olup $(0, 0)$ maksimum noktası ve $x = 2$ için $y = \sqrt[3]{-4}$ olup $(2, \sqrt[3]{-4})$ minimum noktasıdır.

7. $y = (2x - a)^{1/3}(x - a)^{2/3}$ *fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini belirtiniz.*

Fonksiyonun maksimum ve minimum değerleri, x in türevi işaret değiştirerek, sıfır veya sonsuz kılan değerlerine karşılık olacağından :

$$y' = \frac{2}{3}(2x - a)^{-2/3}(x - a)^{2/3} + \frac{2}{3}(x - a)^{-1/3}(2x - a)^{1/3}$$

$$y' = \frac{2}{3}\,\frac{3x - 2a}{(2x-a)^{2/3}(x-a)^{1/3}}$$

olup $x = \frac{2a}{3}$ için $y' = 0$ ve $x = a$ için $y' \to \infty$ durumundadır.

$x = \frac{a}{2}$ için hernekadar $y' \to \infty$ olmakta ise de türev bu değerde işaret değiştirmemektedir. Türev $(3x - 2a)(x - a)$ çarpımının işaretinin aynı işarette olacağından :

$$\frac{2a}{3} < x < a \quad \text{aralığında} \quad y' < 0 \quad \text{ve}$$

$$x < \frac{2a}{3} \quad \text{ve} \quad x > a \quad \text{aralıklarında} \quad y' > 0 \quad \text{dir.}$$

Bunlara göre fonksiyon, $x = \frac{2a}{3}$ için $y = \frac{a}{3}$ meksimum değerine ve $x = a$ için $y = 0$ mınimum değerine maliktir.

8. $f(x) = e^{-x}\sqrt{x}$ *fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.*

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}} \quad \text{olup} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad f'(x) = 0 \ \text{dır.}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}+h\right)=\frac{e^{-\left(\frac{1}{2}+h\right)}(-h)}{\sqrt{\frac{1}{2}+h}}<0 \quad \text{ve}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}-h\right)=\frac{e^{-\left(\frac{1}{2}-h\right)}(+h)}{\sqrt{\frac{1}{2}-h}}>0$$

olarak $x=\frac{1}{2}$ de türev pozitif değerlerden negatif değerlere geçerek sıfır değerini alır. O halde $x=\frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2e}}$ maksimum değerdir.

9. *R yarıçaplı bir kürenin dışına yerleştirilebilecek minimum hacimdaki dik koninin boyutlarını hesaplayınız. (Küre, koni tabanına ve yanal yüzeyine teğettir.)*

Koninin taban yarı çapı x ve yüksekliği y olsun.

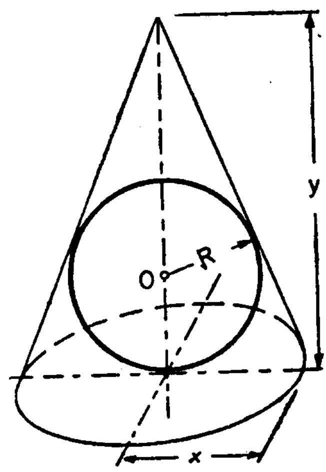
$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$ ve (şekil 43) den :

$$\frac{x}{R}=\frac{y}{\sqrt{(y-R)^2-R^2}}=\frac{y}{\sqrt{y^2-2Ry}}$$

$$x=\frac{Ry}{\sqrt{y^2-2Ry}} \quad \text{ve} \quad x^2=\frac{R^2y^2}{y^2-2Ry}$$

olarak :

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2y^2}{y-2R} \quad \text{dir.}$$



Şekil 43

V hacmını minimum kılacak y değerini bulmak üzere $\frac{dV}{dy}$ türevini hesaplarsak :

$$\frac{dV}{dy}=\frac{\pi R^2}{3}\frac{2y(y-2R)-y^2}{(y-2R)^2}=\frac{\pi R^2}{3}\frac{y^2-4Ry}{(y-2R)^2}$$

bulunur. $y=0$ ve $y=4R$ için $y'=0$ olarak bunlardan $y=4R$, $x=\sqrt{2}R$ değerleri V hacmını minimum kılarlar.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *elipsinin içine çizilebilecek maksimum alandaki dikdörtgenin boyutlarını belirtiniz.*

Şekil 4'e göre dik dörtgenin alanı :

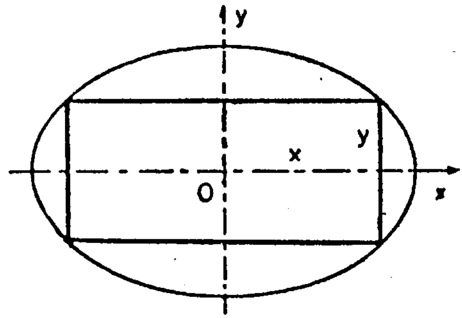
$$F = 4xy \quad \text{ve} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

olduğundan

$$F = \frac{4b}{a}\, x\sqrt{a^2-x^2}$$

dir. Bu alanı maksimum kılacak x değeri $\frac{dF}{dx}$'i sıfır kılacağından :

$$\frac{dF}{dx} = \frac{4b}{a}\,\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$$



Şekil 44

yazılarak $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ve boyutlar olarak $\sqrt{2}\,a$ ve $\sqrt{2}\,b$ bulunur.

11. *Bir pencere, bir dikdörtgen ve bunun üzerine yerleştirilmiş bir ikizkenar üçgenden meydana gelmiştir. Üçgenin yüksekliği tabanının 3/8 ine eşittir. Çevresi 9 m olan pencereden maksimum ışık geçebilmesi için boyutları nasıl seçmelidir?*

Şekil 45'e göre : $h = \frac{3}{8}x$, $x + 2y + 2z = 9$ ve $z^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$

$$z^2 = \frac{9}{64}x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{25}{64}x^2$$

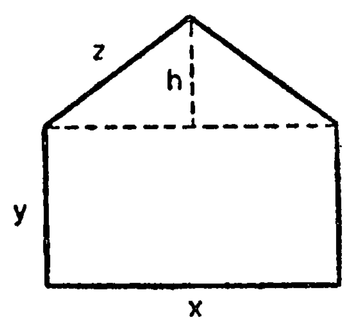
$$z = \frac{5}{8}x$$

olup

$$x + 2y + \frac{5}{4}x = 9,$$

$$\frac{9x}{4} + 2y = 9$$

$$y = \frac{1}{2}\left(9 - \frac{9x}{4}\right)$$



Şekil 45

dir. Maksimum ışık geçebilmeei için pencere alanının maksimum olması gerekir.

$$F = xy + \frac{1}{2} hx = \frac{x}{2}\left(9 - \frac{9x}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} x^2 = \frac{9}{2} x - \frac{15}{16} x^2 \quad \text{ve}$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{9}{2} - \frac{15}{8} x = 0 \quad \text{dan} \quad x = \frac{12}{5} = 2{,}40 \text{ m} \quad \text{ve} \quad y = 1{,}80 \text{ m}$$

bulunur. $y'' = -\frac{15}{8} < 0$ olup sonuçlar maksimuma karşılıktır.

12. *300 m³ su alacak silindir şeklinde ağzı açık bir su deposu yaptırılacaktır. Bu deponun tabanında kullanılacak malzemenin metre karesi yanal yüz için kullanılacak malzemenin iki katı fiatta olduğuna göre deponun en ucuza maledilebilmesi için boyutları nasıl seçmelidir?*

Deponun taban yarıçapı r, yüksekliği h ve yanal yüz için kullanılacak malzemenin metre karesi a lira olsun. Bu takdirde:

$$V = \ r^2 h = 300$$

tabanın maliyeti $= \pi r^2 2a$

yanal yüzün « $= 2\pi rha$

deponun « $A = 2\pi r^2 a + 2\pi r h a$ ve $h = \frac{300}{\pi r^2}$ olarak

$$A = 2\pi r^2 a + 2\pi r . \frac{300}{\pi r^2} . a = 2\pi r^2 a + \frac{600\, a}{r}$$

olup A yı minimum kılan r değeri:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r a - \frac{600\, a}{r^2} = \frac{4\pi a r^3 - 600\, a}{r^2} = 0 \quad \text{dan} \quad r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$$

bulunur. h ise :

$$h = \frac{300}{\pi r^2} = \frac{300}{\pi} \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{150^2}} = 2 \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} = 2r \text{ dir.}$$

13. *Bir otomobil fabrikası herbiri 900 dolardan ayda ancak 5000 otomobil satabiliyor. Herbirinin fiatının 100 dolar daha ucuza satılması halinde ayda 1500 otomobil daha fazla satılabiliyor. En büyük kazancı sağlıyacak otomobil fiatının ne olduğunu hesaplayınız.*

En büyük kazancı sağlıyacak otomobil fiatı x olsun. Kazanç :

$$A = \left(\frac{900 - x}{100} .1500 + 5000\right) x = 18500x - 15x^2$$

olup A yı maksimum yapan x değeri :

$$\frac{dA}{dx} = 18500 - 30x = 0 \quad \text{dan} \quad x = 616\frac{2}{3} \text{ dolar}$$

olarak bulunur.

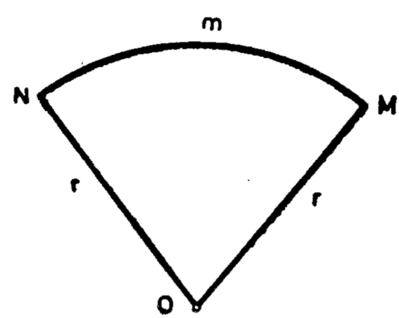
14. *E = Elektromotor kuvvet, r = iç direnç, R = dış direnç olduğuna göre bir volta pilinin gücü $P = \dfrac{E^2R}{(r+R)^2}$ formülü ile verilmiştir. P yi maksimum yapan R değerini bulunuz.*

P yi maksimum yapan R değeri :

$$\frac{dP}{dR} = \frac{E^2(r+R)^2 - 2E^2R(r+R)}{(r+R)^4} = \frac{E^2(r+R-2R)}{(r+R)^3}$$

$$= \frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3} = 0 \quad \text{dan} \quad R = r \quad \text{olarak bulunur.}$$

15. *l uzunluğunda bir telden bir daire diliminin bütün çevresi teşkil edilecektir. Yarı çapı nasıl seçmelidir ki bu dilimin alanı maksimum olsun?*



Şekil 46

Şekil 46 da görüldüğü gibi;

$$2r + m = l$$

$$m = l - 2r$$

olup dilimin alanı :

$$F = \frac{\pi r^2}{2\pi r}(l - 2r) = \frac{1}{2} r (l - 2r)$$

dir.

Bu alanı maksimum kılacak r değeri :

$$\frac{dF}{dr} = \frac{1}{2} l - 2r = 0 \quad \text{dan} \quad r = \frac{l}{4} \quad \text{olarak bulunur.}$$

16. *Bir telefon kumpanyası, bir merkezde 1000 veya daha az sayıda abone olduğu zaman her alet başına 15 lira net kâr yapıldığını görüyor. Eğer 1000 den fazla abone olursa, her alet başına ya-*

pılan kâr, bu sayıdan fazla olan her abone için bir kuruş azalıyor. Maksimum kârı hangi sayıda abonenin temin edeceğini hesaplayınız.

Maksimum kârı 1000 den x kadar fazla abonenin temin ettiğini düşünelim. Buna göre kâr:

$$A = (1000 + x)(15 - 0{,}01\,x)$$

olacaktır. A yı maksimum kılan x değeri ise:

$$\frac{dA}{dx} = 15 - 0{,}01x - 0{,}01(1000 + x) = 0 \quad \text{dan} \quad x = 250$$

olarak bulunur. Buna göre maksimum kârı temin eden abone sayısı:

$$1000 + 250 = 1250$$

dir.

17. *$y = 2a + \sin 2x + \sin(2a - 2x)$ fonksiyonunun maksimum değerini bulunuz.* $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$

$$y' = 2\cos 2x - 2\cos(2a - 2x)$$

olup

$$2\cos 2x - 2\cos(2a - 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \cos(2a - 2x)$$

$$2x = 2a - 2x$$

$$x = \frac{a}{2}$$

için $y' = 0$ olur.

$$y'' = -4\sin 2x - 4\sin(2a - 2x)$$

olarak $x = \frac{a}{2}$ için $y'' = -8\sin a < 0$ dır. Buna göre fonksiyon $x = \frac{a}{2}$ için bir maksimum değere maliktir ve bu maksimum değer:

$$y = 2a + \sin a + \sin a = 2(a + \sin a)$$

dır.

18. $y = \dfrac{2x^2 + 4x - 16}{x^2 + 2x - 3}$ *fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon paydayı sıfır kılan $x = -3$ ve $x = 1$ değerlerinden başka x in her değeri için tanımlıdır.

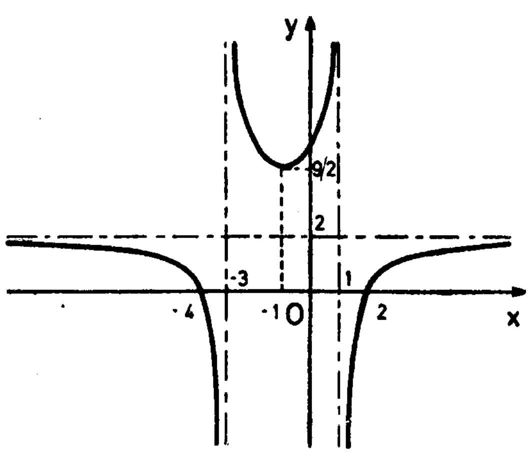
$$y' = \frac{20(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} \quad \text{olup} \quad x = -1 \quad \text{için} \quad y' = 0 \quad \text{dır.}$$

$x \to \mp\infty$ halinde $y \to 2$ olup $y = 2$ doğrusu yatay asimptod ve $x \to -3$, $x \to 1$ hallerinde de $y \to \infty$ olup $x = -3$, $x = 1$ doğruları düşey asimptoddur.

Değişim tablosu :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	2	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$\frac{9}{2}$ min.	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	2

olup eğri şekil 47 de gösterildiği gibidir.



Şekil 47

Tabanı Ox ekseni üzerinde ve iki köşesi denklemi $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ *$(a > 0)$ olan eğri üzerinde bulunan en büyük dik dörtgenin alanını hesaplayınız.*

$y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlıdır.

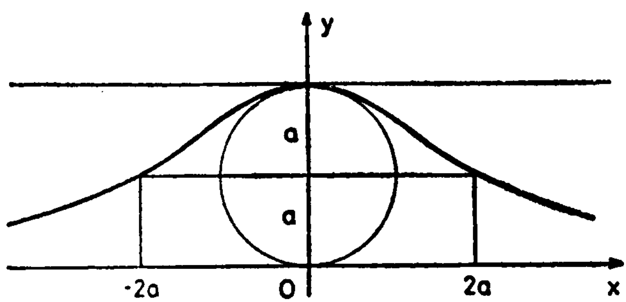
$y' = \dfrac{-16a^3x}{(x^2+4a^2)^2}$ olup $x = 0$ için $y' = 0$ dır.

$x \to \mp\infty$ halinde $y \to 0$ olarak $y = 0$ doğrusu yatay asimptoddur.

Değişim tablosu :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$2a$ maks.	$\searrow$	0

olarak eğrisi şekil 48 de gösterilmiştir.



Şekil 48

Aranan en büyük alan : $F = 2xy$ ve

$$\frac{dF}{dx} = 2y + 2x\frac{dy}{dx} = \frac{16\,a^3(4a^2 - x^2)}{(x^2+4a^2)^2}$$

olup $\dfrac{dF}{dx}$ i sıfır kılan değerler $x = \mp 2a$ dır. Bunlardan $x = 2a$ F alanını maksimum kılar. Bu maksimum değer:

$x = 2a$ için $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + 4a^2} = a$ olacağından

$$F = 2xy = 2.2a.a = 4a^2$$

dir.

20. $y = \dfrac{(x+2)^2}{(x+3)^2}$ *fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon, paydasını sıfır kılan $x = -3$ değerinden başka, x in her değeri için tanımlıdır.

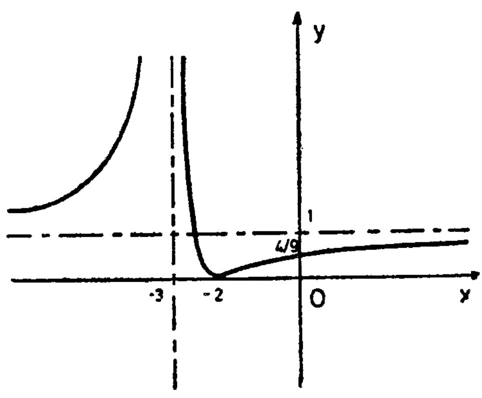
$$y' = \frac{2(x+2)}{(x+3)^3} \quad \text{olup} \quad x = -3 \text{ için } y' = 0 \text{ dır.}$$

$x \to \mp\infty$ halinde $y \to 1$ olup $y = 1$ doğrusu yatay asimptod ve $x \to -3$ halinde de $y \to \infty$ olup $x = -3$ doğrusu düşey asimptoddur.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0 min	↘	1

olup eğrisi şekil 49 da gösterilmiştir.



Şekil 49

21. $y = x - \frac{1}{x}$ *fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon, $x = 0$ dan başka x in her değeri için tanımlıdır.

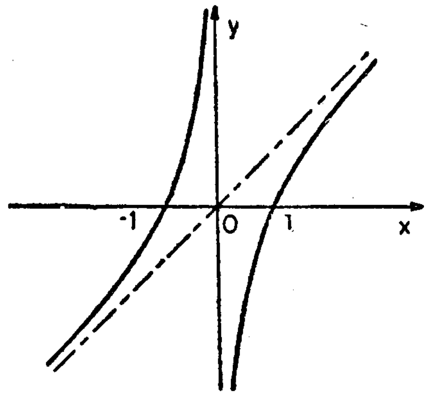
$$y' = 1 + \frac{1}{x^2} \quad \text{olarak daima pozitifdir.}$$

$x \to \mp\infty$ halinde $y \to \mp\infty$ ve $x \to 0$ halinde $y \to \infty$ olup $y = x$ doğrusu eğik asimptoddur.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	|	$+$
y	$-\infty \nearrow +\infty$	|	$-\infty \nearrow +\infty$

olup eğrisi şekil 50 de gösterilmiştir.



Şekil 50

$y = \mp x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ *fonksiyonunun eğrisini çiziniz.*

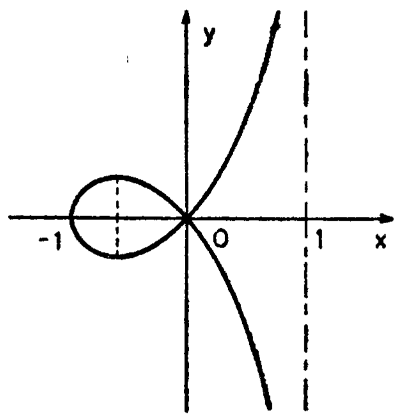
Eğri Ox eksenine göre simetrik olup yarısını elde etmek üzere $y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ fonksiyonunu inceleyelim:

Fonksiyon $-1 \leq x < +1$ aralığında tanımlıdır.

$$y' = \frac{1 + x - x^2}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} \quad \text{olup}$$

$x = \dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$ için $y' = 0$ dır.

Bunlardan $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ bizim inceleme aralığımıza dahil değildir.



Şekil 51

$x \to 1$ halinde $y \to \infty$ olup $x = 1$ doğrusu düşey asimptoddur.

Değişim tablosu:

x	-1		$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$		$+1$
y'	∞	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$	$\nearrow$	$+\infty$
			min.		

olup eğrisi çizilir ve Ox e göre simetriği alınırsa Şekil 51 deki eğri elde edilir.

23. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ *fonksiyonunun eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon $-1 \leq x < 1$ aralığında tanımlıdır.

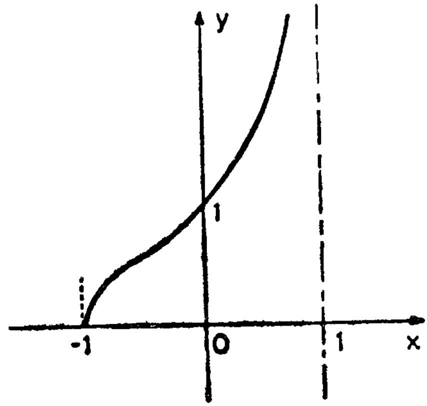
$$y' = \frac{1}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$$ olup daima pozitifdir.

$x \to 1$ halinde $y \to \infty$ olup $x=1$ doğrusu düşey asimptoddur.

Değişim tablosu :

x	-1		$+1$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

olup eğri şekil 52 de gösterilmiştir.



Şekil 52

24. $y=\mp\sqrt{x^3-x^4}$ *fonksiyonunun eğrisini çiziniz.*

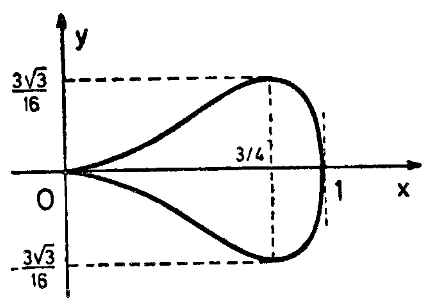
Eğri Ox eksenine göre simetrik olup yarısını elde etmek üzere $y=\sqrt{x^3-x^4}$ fonksiyonunu inceliyelim.

$x^3-x^4 \geqslant 0$ olması gerektiğinden fonksiyonun tanımlı olabilmesi için x ancak $0 \leqslant x \leqslant 1$ aralığında değerler alabilecektir.

$$y' = \frac{3x^2-4x^3}{2\sqrt{x^3-x^4}} = \frac{\sqrt{x}\,(3-4x)}{2\sqrt{1-x}}$$ olup $x=0$ ve $x=\dfrac{3}{4}$ için $y'=0$ dır.

Değişim tablosu:

x	0		$\frac{3}{4}$		1
y'	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$ maks.	$\searrow$	0



Şekil 53

olup bu tabloya karşılık olan eğri çizilir ve Ox eksenine göre simetriği alınırsa Şekil 53 deki eğri elde edilir.

25. $a^4y^2 + b^2x^4 = a^2b^2x^2$ *eğrisini çiziniz.*

$$y^2 = \frac{b^2}{a^4}x^2(a^2 - x^2) \quad \text{ve} \quad y = \mp\frac{b}{a^2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

olup eğri Ox eksenine göre simetriktir. Eğrinin yarısını elde etmek üzere $y = \frac{b}{a^2}x\sqrt{a^2 - x^2}$ fonksiyonunu inceleyelim.

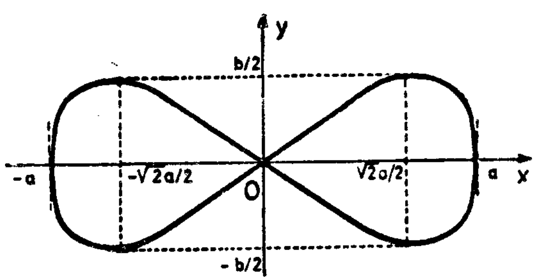
$a^2 - x^2 \geqslant 0$ olması gerektiğinden fonksiyon x in ancak, $-a \leqslant x \leqslant +a$ aralığında tanımlı olacaktır.

$$y' = \frac{b}{a^2}\frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{olup} \quad x = \mp\frac{\sqrt{2}\,a}{2} \quad \text{için} \quad y' = 0 \quad \text{dır.}$$

Değişim tablosu:

x	$-a$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$		$+\frac{\sqrt{2}}{2}a$		$+a$
y'	∞	$-$	0	$+$	0	$-$	∞
y	0	↘	$-\frac{b}{2}$ min.	↗	$\frac{b}{2}$ maks.	↘	0

olup bu tabloya karşılık olan eğri çizilir ve Ox eksenine göre simetriği alınırsa şekil 54 deki eğri elde edilir.



Şekil 54

26. $y = \cos 2x - 2\cos x$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon 2π peryodludur. Diğer taraftan $f(\pi - x) = f(\pi + x)$ olduğundan $x = \pi$ doğrusu simetri eksenidir. Buna göre inceleme $(0, \pi)$ aralığında yapılır ve bu aralığa ait eğri çizildikten sonra $x = \pi$ doğrusuna göre simetriği alınır.

$$y = \cos 2x - 2\cos x = 2\cos^2 x - 2\cos x - 1$$

olup $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \cong -0{,}366$, $x = 111°30'$ için $y = 0$ dır.

$$y' = -4\cos x \sin x + 2\sin x = 2\sin x(1 - 2\cos x)$$

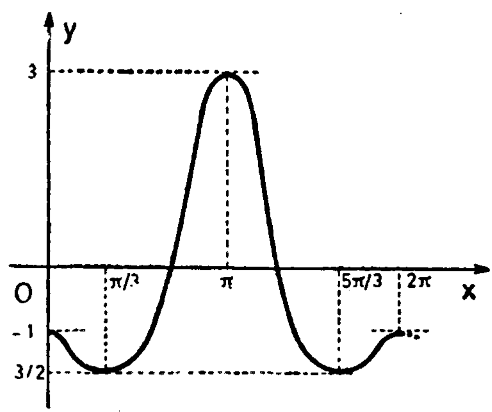
olup $x = 0$, $x = \pi$ ve $x = \dfrac{\pi}{3}$ değerleri için $y' = 0$ dır. Buna göre

$0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ için $y' < 0$ ve $\dfrac{\pi}{3} < x < \pi$ için $y' > 0$ dır.

Değişim tablosu :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
y'	0	$-$	0	$+$	0
y	-1 maks.	↘	$-\frac{3}{2}$ min	↗	3 maks.

olup eğri şekil 55 de gösterilmiştir.



Şekil 55

27. $y = \dfrac{3 - 2\sin x}{1 + 2\sin x}$ *fonksiyonunun değişimini incleyiniz ve eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon 2π peryodlu olup incelemeyi $(0, 2\pi)$ aralığında yapalım.

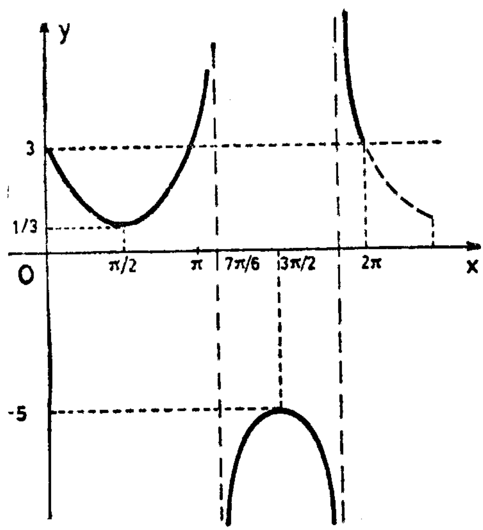
$y' = \dfrac{-8\cos x}{(1 + 2\sin x)^2}$ olup $x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $x = \dfrac{3\pi}{2}$ için $y' = 0$ dır.

$x \to \frac{7\pi}{6}$ ve $x \to \frac{11\pi}{6}$ halinde $y \to \infty$ olduğundan $x = \frac{7\pi}{6}$ ve $x = \frac{11\pi}{6}$ doğruları düşey asimptoddur.

Değişim tablosu:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y'		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$ Min.	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-5 Maks.	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	3

olup eğrisi Şekil 56 da gösterilmiştir.



Şekil 56

28. *$y = 2 \sin x + \cos 2x$ eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon 2π peryodlu olup incelemeyi $(0, 2\pi)$ aralığında yapalım.

$$y = 2 \sin x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x - 2 \sin^2 x$$

ve

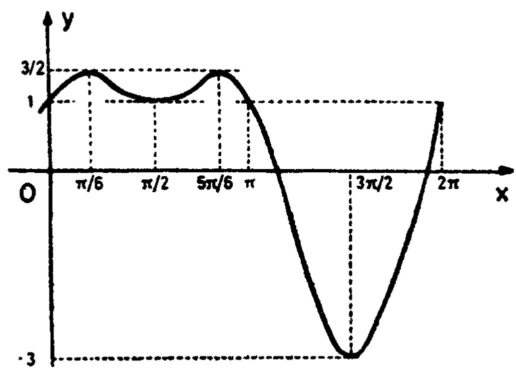
$$y' = 2 \cos x - 4 \sin x \cos x = 2 \cos x (1 - 2 \sin x)$$

olup $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ değerleri için $y' = 0$ dır.

Değişim tablosu:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1
			maks		min		maks		min		

olup eğri şekil 57 de gösterilmiştir.



Şekil 57

29. $y = \cos^2 x \sin 2x$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon π peryodlu olup incelemeyi $(0, \pi)$ aralığında yapmak kâfidir.

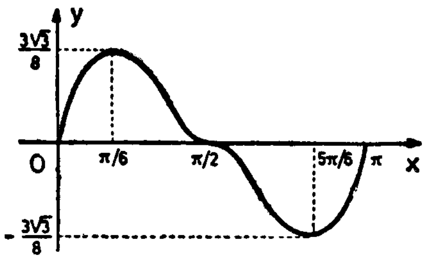
$$y' = 2\cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x)$$

olup $\operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{\pi}{6}$ ve $x = \frac{5\pi}{6}$ için $y' = 0$ dır.

Değişim tablosu:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	0
			maks.		min.		

dir. $x = \frac{\pi}{2}$ için $y' = 0$, $y'' = 0$ olup $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ noktası büküm noktasıdır. Eğri şekil 58 de gösterilmiştir.



Şekil 58

30. $y = \dfrac{tg\, x - 1}{tg\, x + 1}$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon π peryodlu olup incelemeyi $(0, \pi)$ aralığında yapmak kâfidir. Fonksiyon $\operatorname{tg} x = -1$ yani $x = \frac{3\pi}{4}$ için tanımlı değildir. $x = \frac{3\pi}{4}$ için $y \to \infty$ olarak $x = \frac{3\pi}{4}$ doğrusu düşey asimptoddur.

$x = 0$ ve $x = \pi$ için $\operatorname{tg} x = 0$ olarak $y = -1$ dir.

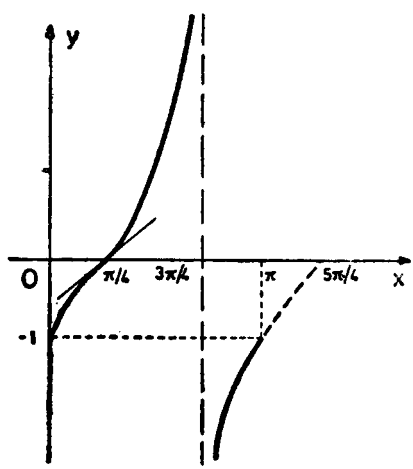
$$y' = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg} x + 1) - \dfrac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg} x - 1)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} = \frac{2}{\cos^2 x\, (\operatorname{tg} x + 1)^2}$$

olup daima pozitifdir.

Değişim tablosu:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
y'	$+$		$+$
y	$-1 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow -1$

olup eğrisi şekil 59 de gösterilmiştir.



Şekil 59

31. $y = tg^2 x + tg\, x - 1$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon π peryodlu olup incelemeyi $(0, \pi)$ aralığında yapmak kâfidir. Fonksiyon $x = \frac{\pi}{2}$ için tanımlı değildir. $x \to \frac{\pi}{2}$ halinde $y \to \infty$ olup $x = \frac{\pi}{2}$ doğrusu düşey asimptoddur.

$x = 0$ ve $x = \pi$ için $\text{tg}\, x = 0$ ve $y = -1$ dir.

$$y' = 2\,\text{tg}\, x \,.\, \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\,\text{tg}\, x + 1}{\cos^2 x}$$

olup $2\,\text{tg}\, x + 1 \geqslant 0$ veya $\text{tg}\, x \geqslant -\frac{1}{2}$ için $y' \geqslant 0$ dır. Buna göre $\text{tg}\, x = -\frac{1}{2}$, $x = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ için $y' = 0$ dır.

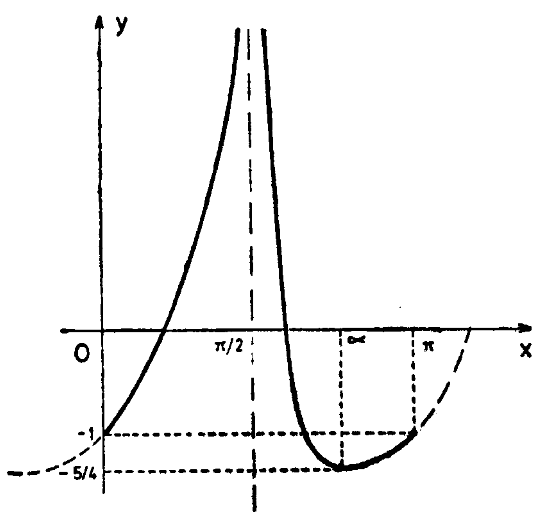
$\text{tg}\, x \geqslant -\frac{1}{2} = \text{tg}\, \alpha$ olması için:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha \leqslant x < \pi \quad \text{olmalıdır.}$$

Değişim tablosu:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		α		π
y'		$+$	|	$-$	0	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$ min.	$\nearrow$	-1

olup eğrisi şekil 60 da gösterilmiştir.



32. *$y = \cos(3 \text{ Arcsin } x)$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz ve eğrisini çiziniz.*

Arcsin $x = t$ yapılırsa $x = \sin t$ olarak:

$$y = \cos 3t = \cos t(4\cos^2 t - 3)$$

yazılabilir. Diğer taraftan:

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$$

olarak

$$y = (1 - 4x^2)\sqrt{1 - x^2}$$

elde edilir.

Fonksiyon, x in $(-1, +1)$ aralığındaki değerleri için tanımlıdır. Ayrıca çift fonksiyon olup incelemeyi $(0, +1)$ aralığında yapmak kâfidir. Bu incelemeye ait eğri çizilir ve Oy eksenine göre simetriği alınırsa eğrinin tamamı çizilmiş olur.

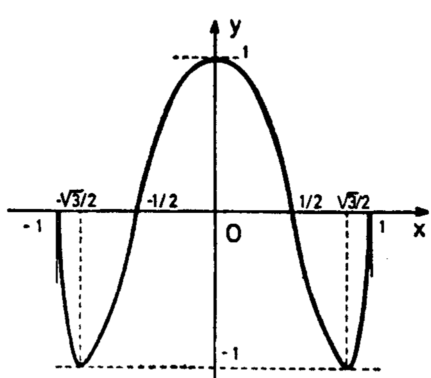
$x = 0$, $x = 1$ ve $x = \frac{1}{2}$ için $y = 0$ dır.

$y' = \dfrac{3x(4x^2 - 3)}{\sqrt{1-x^2}}$ olup $x = 0$ ve $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ için $y' = 0$ dır.

Değişim tablosu:

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
y'	0	$-$	0	$+$	∞
y	1 maks.	↘	-1 min.	↗	0

olup eğri Şekil 61 de gösterilmiştir.



Şekil 61

33. $y = Arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ *eğrisini çiziniz.*

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{2x^2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2}$$

yazılarak buradan, x ne olursa olsun $-1 \leq \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ olduğu görülür.

Buna göre y fonksiyonu x in her değeri için tanımlıdır. $f(-x) = f(x)$ olup fonksiyon çift fonksiyondur ve oy ekseni simetri eksenidir. O halde incelemeyi $(0, +\infty)$ aralığında yapmak kâfidir. x, 0 dan $+\infty$ a kadar değiştiği zaman:

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2}$$

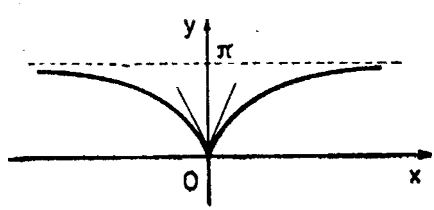
ifadesi $+1$ den -1 e kadar azalmaktadır. Bu sebepten fonksiyon artan fonksiyondur.

$x \to \infty$ halinde $y \to \pi$ olup $y = \pi$ doğrusu asimptoddur.

$y' = \dfrac{4x}{(1+x^2)\sqrt{4x^2}} = \dfrac{2}{1+x^2}$ olup daima pozitifdir.

Değişim tablosu:

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	π



Şekil 62

olup eğri Şekil 62 de gösterilmiştir.

34. $y = Arctg \dfrac{1}{x}$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon x in sıfırdan başka bütün değerleri için tanımlıdır.

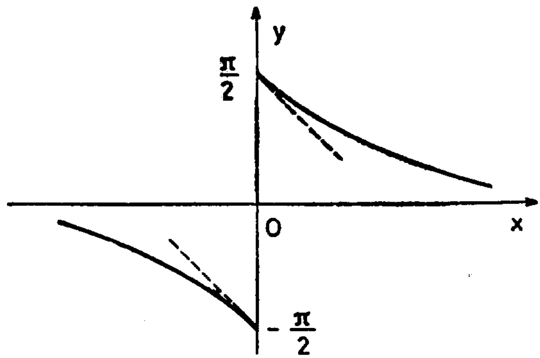
$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ olup daima negatiftir.

$x \to 0^-$ halinde $y \to -\dfrac{\pi}{2}$ ve $x \to 0^+$ halinde ise $y \to +\dfrac{\pi}{2}$ dir. $x \to 0$ için $y' = -1$ dir.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ | $+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

olup eğri Şekil 63 de gösterilmiştir.



Şekil 63

35. $y = e^{\frac{1}{x}}$ *eğrisini çiziniz.*

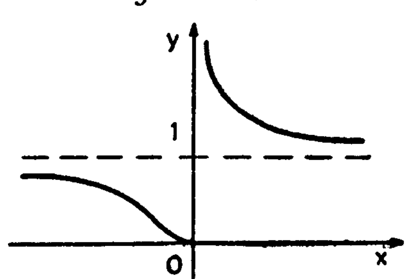
Fonksiyon $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ aralıklarında tanımlıdır. x negatif değerlerden itibaren sıfıra yaklaşırsa $y \to 0$ ve x pozitif değerlerden itibaren sıfıra yaklaşırsa $y \to +\infty$ olmaktadır. $x \to \infty$ halinde ise $y \to 1$ olarak $y = 1$ doğrusu asimptoddur.

$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ olup daima negatifdir. O halde fonksiyon daima azalan fonksiyondur. $x \to 0^-$ halinde $y' \to 0$ dır.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	
y	1	$\searrow$	0 | $+\infty$	$\searrow$	1

olup eğri şekil 64 de gösterilmiştir.



Şekil 64

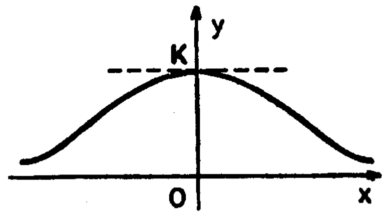
36. $y = k\,e^{-x^2}$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon x in bütün değerleri için tanımlıdır. $x \to \mp\infty$ halinde $y \to 0$ olmaktadır.

$y' = -2kx\,e^{-x^2}$ olup $x<0$ için $y'>0$ ve $x>0$ için $y'<0$ dir.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	k (maks.)	$\searrow$	0



Şekil 65

olup eğri şekil 65 de gösterilmiştir.

37. $y = x\,e^x$ *eğrisini çiziniz.*

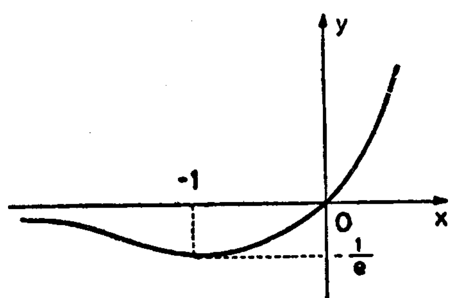
Fonksiyon, x in bütün değerleri için tanımlıdır. $x \to -\infty$ halinde $y \to 0$ ve $x \to +\infty$ halinde ise $y \to +\infty$ dır. Buna göre $y = 0$ doğrusu asimptoddur.

$y' = (x+1)\,e^x$ olup $x = -1$ için $y' = 0$ dır.

$y'' = (x+2)\,e^x$ olup $x = -2$ için y'' işaret değiştirerek sıfır olmaktadır. Buna göre $\left(-2\;,\; -\dfrac{2}{e^2}\right)$ noktası büküm noktasıdır.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$ (Min.)	$\nearrow$	$+\infty$



Şekil 66

olup eğri şekil 66 da gösterilmiştir.

38. $y = \dfrac{10}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ aralıklarında tanımlıdır. x pozitif değerlerden itibaren sıfıra yaklaşırsa $y \to 0$ ve x negatif değerlerden itibaren sıfıra yaklaşırsa $y \to 10$ olur. Buna göre fonksiyon $x = 0$ da süreksizdir.

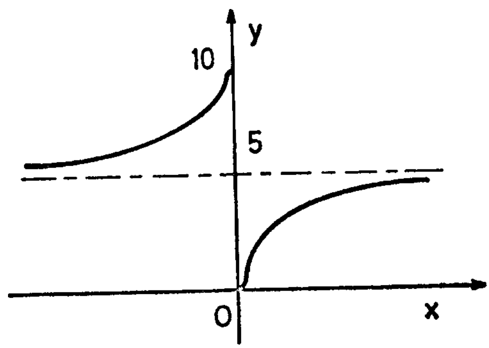
$x \to \infty$ halinde $y \to 5$ olup $y = 5$ doğrusu asimptoddur.

$y' = \dfrac{10 e^{\frac{1}{x}}}{x^2 (1 + e^{\frac{1}{x}})^2}$ olup daima pozitifdir. Bu sebepten de fonksiyon daima artan fonksiyondur.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	|	$+$	
y	5	$\nearrow$	10 | 0	$\nearrow$	5

olup eğri Şekil 67 de gösterilmiştir.



Şekil 67

39. *$y = x^x$ eğrisini çiziniz.* $(x > 0)$

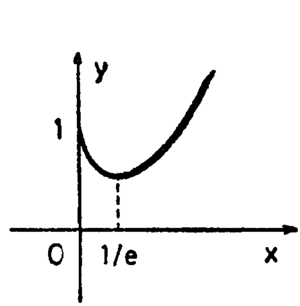
$y' = e^{x \log x} (\log x + 1)$ olup $\log x = -1$, $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} = 0{,}368$ için türev işaret değiştirerek sıfır değerini almaktadır.

$x \to +\infty$ halinde $y \to +\infty$ ve $x \to 0$ için $y \to 1$ olmaktadır.

Değişim tablosu:

x	0		$1/e$		$+\infty$
y'	∞	$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$\left(\dfrac{1}{e}\right)^{1/e}$ Min.	$\nearrow$	$+\infty$

olup eğri Şekil 68 de gösterilmiştir.



Şekil 68

40. $y = x^{\frac{1}{x}}$ *eğrisini çiziniz.*

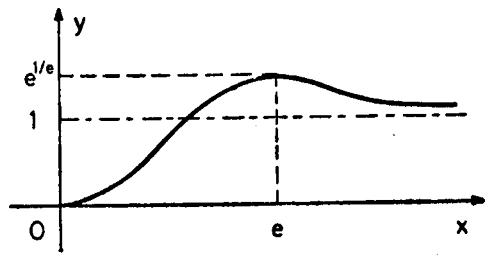
Fonksiyon x in bütün pozitif değerleri için süreklidir.

$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$ olup $1-\log x$ in işaretindedir.
$1-\log x = 0$, $\log x = 1$ yani $x = e$ için $y' = 0$ dır.
$x \to +\infty$ için $y \to 1$ dir.

Değişim tablosu:

x	0		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$ Maks.	$\searrow$	1

olup eğri Şekil 69 da gösterilmiştir.



Şekil 69

41. $y = x \log x$ *eğrisini çiziniz.*

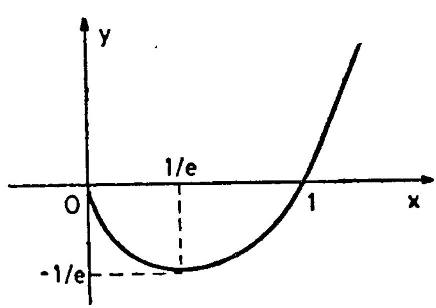
Fonksiyon x in bütün pozitif değerleri için tanımlıdır.
$x \to 0$ için $y \to 0$ ve $x \to +\infty$ için $y \to +\infty$ dır.

$y' = \log x + 1$ olup $\log x = -1$, $x = \frac{1}{e}$ için $y' = 0$ dır.

Değişim tablosu:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$ Min.	$\nearrow$	$+\infty$

olup eğri Şekil 70 de gösterilmiştir.



Şekil 70

42. $y = x - \log x$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon x in bütün pozitif değerleri için tanımlıdır.

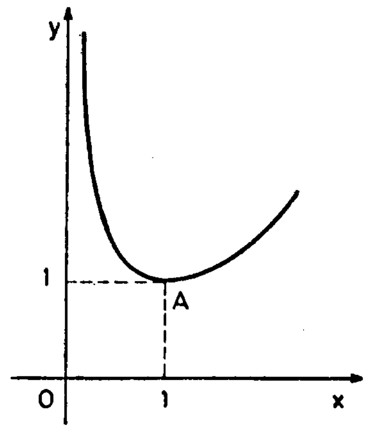
$$y' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \text{ olup } x = 1 \text{ için } y' = 0 \text{ dır.}$$

$x \to 0$ halinde $y \to +\infty$ ve $x \to +\infty$ halinde de $y \to +\infty$ dır.

Değişim tablosu:

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1 (Min.)	↗	$+\infty$

olup eğri Şekil 71 de gösterilmiştir.



Şekil 71

43. $y = x + \log(x^2 - 1)$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon $x^2 - 1 > 0$ yani $x < -1$ ve $x > 1$ değerleri için tanımlıdır. $x \to \mp 1$ için $y \to \infty$ olup $x = -1$ ve $x = +1$ doğruları asimptoddur.

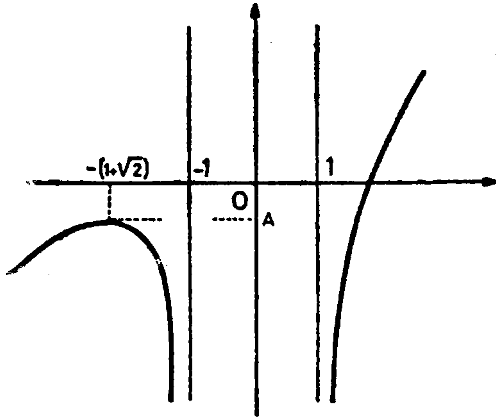
$$y' = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} \text{ olup } x = -1 - \sqrt{2} \text{ için } y' = 0 \text{ dır.}$$

$x \to -\infty$ için $y \to -\infty$ ve $x \to +\infty$ için $y \to +\infty$ dır.

Değişim tablosu:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$+1$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		░		$+$	
y	$-\infty$	↗	A (Maks.)	↘	$-\infty$	░	$-\infty$	↗	$+\infty$

olup eğri Şekil 72 de gösterilmiştir.



Şekil 72

44. $y = \dfrac{\log x - x^2 - 1}{x}$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyon x in bütün pozitif değerleri için tanımlıdır.

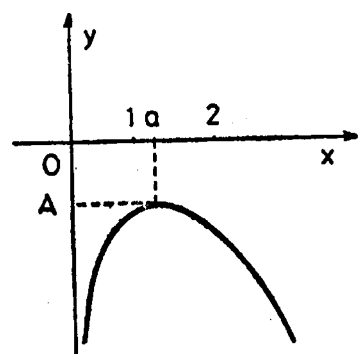
$$y' = \frac{2 - x^2 - \log x}{x^2}$$

olup $z = 2 - x^2 - \log x$ in işaretindedir. $z' = -\dfrac{2x^2 + 1}{x}$ olarak negatifdir. Buna göre z fonksiyonu daima azalandır. $x = 1$ için $z = 1$ ve $x = 2$ için $z = -2 - \log 2 < 0$ olup z, 1 ile 2 arasında a gibi bir kök kabul eder.

Değişim tablosu:

x	0		a		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	A Maks.	↘	$-\infty$

olup eğri Şekil 73 de gösterilmiştir.



Şekil 73

45. $x^3+4y^3-xy^2=2$ eğrisinin $(2,-1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Cevap: $11x+16y=6$

46. $x^{1/3}+y^{1/5}-3y^2=0$ eğrisinin $(8, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Cevap: $348\, y=5x+308$

47. $x^n+y^n=2$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Cevap: $x+y=2$

48. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin herhangibir $(x_0\,,\,y_0)$ noktasındaki teğetinin denkleminin $\frac{x_0\,x}{a^2}+\frac{y_0\,y}{b^2}=1$ olduğunu gösteriniz.

49. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ eğrisinin herhangibir $(x_0\,,\,y_0)$ noktasındaki teğetinin denkleminin $x_0^{-1/3}\,x+y_0^{-1/3}\,y=a^{2/3}$ olduğunu gösteriniz.

50. $9x^2+4y^2=36$ elipsinin $(x=1,\ y>0)$ noktasındaki teğet altı ve normal altı uzunluğunu hesaplayınız.

Cevap ; Normal altı uz. $=\frac{9}{4}$, teğet altı uz. $=3$

51. $xy=a^2$ eğrisinin herhangibir noktasındaki teğetinin koordinat eksenleriyle teşkil ettiği üçgenin alanının sabit ve $2a^2$ ye eşit olduğunu ispatlayınız.

52. $3x^2+5y^2=32$ elipsinin, apsisi ordinatına eşit olduğu noktasındaki teğet ve normalinin denklemlerini bulunuz.

Cevap: $3x+5y\pm 16=0$ ve $5x-y\pm 4=0$

53. Bir hiperbolün teğetinin asimptodlar arasında kalan parçasının değme noktası tarafından iki eşit parçaya bölündüğünü gösteriniz.

54. a, b ve c yi o suretle belirtiniz ki $y=ax^2+bx+c$ parabolu $(-3,\ 12)$ noktasından geçsin ve $3x+y+1=0$ doğrusuna $(-1,\ 2)$ noktasında teğet olsun.

55. $4x^2+9y^2=72$ eğrisi için, değme noktası, koordinat eksenleri arasında kalan teğetin orta noktası olacak şekilde, her teğetin bu değme noktasının koordinatlarını belirtiniz.

56. $\log(x^2+y^2)=2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x}$ eğrisi ile $y=mx$ doğrusunun teşkil ettiği açının sabit ve $\frac{\pi}{4}$ e eşit olduğunu gösteriniz.

57. $x^2y=4$ ve $y=\frac{8}{x^2+4}$ eğrilerinin kesişme açılarını bulunuz.

Cevap: $\mathrm{Arctg}\,\frac{1}{3}$

58. $x^2+y^2-12x+16=0$ ve $y^2=\frac{x^3}{4-x}$ eğrilerinin kesişme açılarını bulunuz.

Cevap: 0

59. $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$ eğrisinin büküm noktalarını bulunuz.

60. $a^2y^2 = x^2 + x^2y^2$ eğrisinin büküm noktalarını bulunuz.

Cevap : (0, 0)

61. $y = (x+1)\,\text{Arctg}\,x$ eğrisinin büküm noktalarını bulunuz.

Cevap : $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

62. $y = e^{-x^2}$ eğrisinin büküm moktasını bulunuz.

Cevap : $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

63. $y = e^{\frac{1}{1-x}}$ eğrisinin büküm noktasını bulunuz.

Cevap : $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$

64. $y = x^4 - 12x^2 + 2$ eğrisinin konkavlığını inceleyiniz.

Cevap: $x < -\sqrt{2}$ ve $x > \sqrt{2}$ için yukarıya, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ için aşağıya doğru konkav

65. $\sin\theta - \cos\theta$ fonksiyonunun maksimum değerinin $\sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz.

66. $y = x - 2\sin x$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

(Cevap : $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ için $2k\pi + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ min. değer

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$ için $2k\pi - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$ maks. değer

67. $y = x - \sin 2x$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

Cevap: $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ için $k\pi + \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$ min. değer ;

$x = k\pi - \frac{\pi}{6}$ için $k\pi - \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ maks. değer.

68. $y = e^{-x}\sqrt{x-1}$ fonksiyonunun $x = \frac{3}{2}$ için $\frac{1}{\sqrt{2}\, e^{3/2}}$ maksimum değerine malik olduğunu gösteriniz.

69. Bir doğru boyunca akan bir nehrin gerisinde, nehirden birisi 10, diğeri 15 km uzaklıkta iki A ve B şehirleri bulunmaktadır. Bu iki şehire su vermek üzere nehir kıyısına bir depo yapılacaktır. AB mesafesinin, nehir kenarına izdüşümü 20 km olduğuna göre boru uzunluğunun minimum olması için depoyu nehir kıyısının hangi noktasında yapmalıdır?

Cevap : A'ya en yakın kıyı noktasına 8 km uzaklıkta.

70. Ox ekseni üzerinde, (1, 2) ve (4, 3) noktalarına uzaklıkları toplamı minimum olan noktayı bulunuz.

Cevap : $\left(2\frac{1}{5}, 0\right)$

71. Bir üçgenin bir kenarı 5 m ve bu kenarın karşısındaki açısı 40° dir. Üçgenin alanının maksimum olabilmesi için diğer açılar ne olmalıdır?

Cevap: 70°

Aşağıda denklemleri verilmiş eğrileri çiziniz.

72. $y=\dfrac{2(x+1)}{x^2-x+2}$

73. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

74. $y=\sqrt{\dfrac{3x^2+3x+2}{x^2-1}}$

75. $y=2\sqrt{x^2-2x}$

76. $y=(1+x^{2/3})(x-7)^2$

77. $y=(2+x)^{1/3}(1-x)^{2/3}$

78. $y=(2x-a)^{1/3}(x-a)^{2/3}$

79. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

80. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2-4}}$

81. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

82. $y=x^{2/3}$

83. $y=\dfrac{1}{3}(x+1)^3(3x-2)^2$

84. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

85. $y=x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

86. $y=ax^3$

87. $y^2=ax^3$

88. $y^2(2a-x)=x^3$

89. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

90. $y^2=x^3+1$

91. $y^3=x^3-x$

92. $y^2=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

93. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

94. $y=\left|\dfrac{x+5}{x+4}\right|$

95. $y=\dfrac{2x+1}{|x-3|}$

96. $y=\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+x+2}$

97. $y=\dfrac{2x^2+x-1}{(x-1)^2}$

98. $y=\dfrac{2x^2-3x}{x^2-x-2}$

99. $y=\dfrac{2x-8}{2x^2-3x-2}$

100. $y=\dfrac{2(x+1)}{x^2-x+2}$

101. $y=\dfrac{4x^2-9x+2}{x-1}$

102. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

103. $y=\dfrac{x^2+5x+2}{x^2+x-1}$

104. $y=\sin 2x+\cos 2x$

105. $y=\sin x+\sin 2x$

106. $y=\dfrac{\sin x}{1+\text{tg}^2 x}$

107. $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$

108. $y=\dfrac{\text{tg}\, x}{1-2\sin x}$

109. $y=\cos x+\dfrac{1}{\sin x}$

110. $y=\sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

111. $y=\text{tg}\, x\, \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

112. $y=\dfrac{2}{\cos x}$

113. $y=2+\dfrac{1}{3\,\text{tg}\, x}$

114. $y=\dfrac{3-4\cos x}{2+\cos x}$

115 $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$

116. $y=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos x+2\sin x}$

117. $y=\dfrac{2}{\sqrt{1-2\sin^2 x}}$

118. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

119. $y=e^{\frac{1}{1-x}}$

120. $y=e^{\frac{x^2}{1-x}}$

121. $y=e^{\frac{1}{x}}$

122. $y=(x+1)\, e^{\frac{1}{x-1}}$

123. $y=\dfrac{x+1}{x-1}\, e^{\frac{1}{x-2}}$

124. $y=\dfrac{\log x}{x}$

125. $y=\dfrac{1}{\log x}$

126. $y=\log\dfrac{x-1}{x+2}$

127. $y=\dfrac{\log x}{1+x-\log x}$

128. $y=\dfrac{\log x}{1+x\log x}$

129. $y=\log\sin x$

6. PARAMETRİK DENKLEMLER

1. $x = \dfrac{2 \sin t}{1+2\cos t}$, $y = \dfrac{\cos t}{1+2\cos t}$ *parametrik denklemlerinden* $\dfrac{dy}{dx}$ *ve* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *türevlerini hesaplayınız.*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2(2+\cos t)}{(1+2\cos t)^2} \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-\sin t}{(1+2\cos t)^2}$$

olarak:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{2(2+\cos t)}$$

bulunur. İkinci mertebe türev ise:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{-(4\cos t+2)}{4(2+\cos t)^2}}{\dfrac{2(2+\cos t)}{(1+2\cos t)^2}} = -\frac{(1+2\cos t)^3}{4(2+\cos t)^3}$$

dir.

2. $x = e^t \sin t$ *ve* $y = e^t \cos t$ *olduğuna göre* $\dfrac{dy}{dx}$ *ve* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *türevlerini hesaplayınız.*

$$\frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t$$

olup

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$$

dir.

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{2}{(\cos t + \sin t)^2} \quad \text{olup} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^t(\cos t + \sin t)^3} \quad \text{dir.}$$

3. *Parametrik denlemleri $x = t^2$, $y = 4t - t^3$ olan eğriyi çiziniz.*

$t = 0$ için $x = 0$, $y = 0$ ve $t = \mp 2$ için $x = 4$, $y = 0$ dır.

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 4 - 3t^2$$

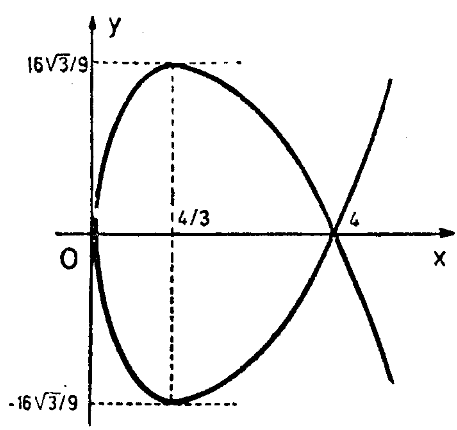
olup $t = 0$ için $\frac{dx}{dt} = 0$ ve $t = \mp \frac{2\sqrt{3}}{3}$ için $\frac{dy}{dt} = 0$ dır

$t \to -\infty$ halinde $x \to +\infty$, $y \to +\infty$ ve $t \to +\infty$ halinde ise $x \to +\infty$ $y \to -\infty$ dır.

Değişim tablosu:

t	$-\infty$		-2		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		0		$+\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2		$+\infty$
x_t'			$-$		|	$-$	0	$+$	|		$+$		
y_t'			$-$		0	$+$	|	$+$	0		$-$		
x	$+\infty$	↘	4	↘	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$	↗	4	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$ Min.	↗	0	↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$ Maks.	↘	0	↘	$-\infty$

olup eğri şekil 74 de gösterilmiştir.



Şekil 74

4. *Parametrik denklemleri $x = t^2 - 2t$, $y = t^3 - 12t$ olan eğriyi çiziniz.*

t nin bütün değerleri için x, y fonksiyonları tanımlı ve sürek-

lidir. $t=0$ ve $t=2$ değerleri için $x=0$ ve $t=0$ ve $t=\pm 2\sqrt{3}$ değerleri için $y=0$ dır.

$$\frac{dx}{dt}=2(t-1)\,,\quad \frac{dy}{dt}=3(t^2-4)\quad \text{olup}\quad t=1\quad \text{için}\quad \frac{dx}{dt}=0;$$

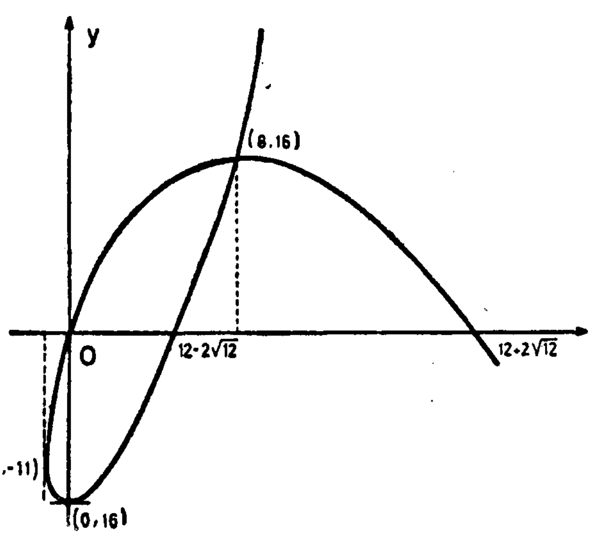
$t=\pm 2$ için $\dfrac{dy}{dt}=0$ dır.

$t\to-\infty$ halinde $x\to+\infty$, $y\to-\infty$ ve $t\to+\infty$ halinde ise $x\to+\infty$ $y\to+\infty$ dır.

Değişim tablosu:

t	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		-2		0		1		2		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
x_t'			$-$		|		$-$		0	$+$	|		$+$		
y_t'			$+$		0		$-$		|	$-$	0		$+$		
x	$+\infty$	$\searrow$	$12+2\sqrt{12}$	$\searrow$	8	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$12-2\sqrt{12}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\searrow$	-11	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
					Maks.						Min.				

olup eğri şekil 75 de gösterilmiştir. (8, 16) noktası eğrinin iki katlı noktasıdır.



5. *Parametrik denklemleri* $x = tg\, t + \sin t,\ y = \dfrac{1}{\cos t}$ *olan eğriyi çiziniz.*

Fonksiyonlar 2π peryodlu olup incelemeyi $(0, 2\pi)$ aralığında yapmak kâfidir. Fonksiyonlarda t yerine $-t$ konulduğu zaman x, $-x$ değerini alır; y ise değişmez. Buna göre Oy ekseni simetri ekseni olup incelemeyi $(0, \pi)$ aralığında yapmalı ve buna karşılık bulunacak eğrinin Oy eksenine göre simetriğini almak suretile eğrinin tamamını elde etmelidir.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + \cos^3 t}{\cos^2 t} \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$

olup $t = \pi$ için $\dfrac{dx}{dt} = 0$; $t = 0$ ve $t = \pi$ için $\dfrac{dy}{dt} = 0$ dır.

$t \to \dfrac{\pi}{2}$ halinde $x \to \infty$ ve $y \to \infty$ dır. Buna göre asimptodik doğrultuyu belirtmek üzere $\dfrac{y}{x}$ i teşkil edelim.

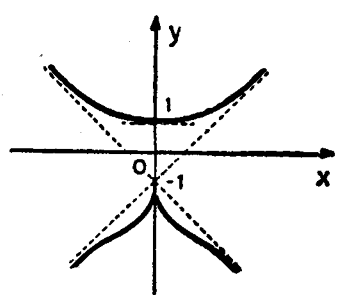
$\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sin t\,(1 + \cos t)}$ olup $t \to \dfrac{\pi}{2}$ halinde $\dfrac{y}{x} \to 1$ ve asimptodik doğrultu $= m = 1$ dir. Diğer taraftan :

$$y - mx = \frac{1 - \sin t - \sin t \cos t}{\cos t}$$

olup $t \to \dfrac{\pi}{2}$ halinde $y - mx \to -1$ olarak asimptodun denklemi $y = x - 1$ dir.

Değişim tablosu:

t	0		$\frac{\pi}{2}$			π
x_t'	2	$+$	|		$+$	0
y_t'	0	$+$	|		$+$	0
x	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$		$\nearrow$	0
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$		$\nearrow$	-1
	min					maks



Şekil 76

olup eğri şekil 76 da gösterilmiştir.

6. *Parametrik denklemleri $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ olan sikloid eğrisini çiziniz.*

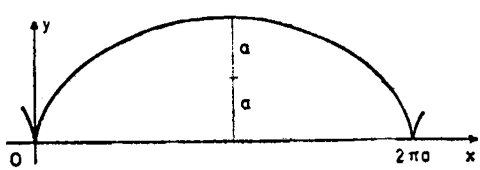
y nin peryodu 2π olup incelemeyi $(0, 2\pi)$ aralığında yapmak kâfidir.

$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$ olarak $\theta = 0$ ve $\theta = 2\pi$ için $\frac{dx}{d\theta} = 0$ ve $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = 2\pi$ için $\frac{dy}{d\theta} = 0$ dır.

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$ olup $\theta = 0$ ve $\theta = 2\pi$ için $\frac{dy}{dx} \to \infty$; $\theta = \pi$ için $\frac{dy}{dx} = 0$ dır.

Değişim tablosu :

θ	0		π		2π
x_θ'	0		+		0
y_θ'	0	+	0	—	0
x	0	↗	πa	↗	$2\pi a$
y	0	↗	$2a$ maks.	↘	0



Şekil 77

olup eğri şekil 77'de gösterilmiştir. Bu eğri a yarı çaplı bir dairenin Ox ekseni üzerinde, kaymadan yuvarlanması halinde çemberi üzerindeki bir noktasının çizdiği eğridir. θ ya $(0, 2\pi)$ aralığının dışında değerler verilirse ayni kemerler tekrar tekrar çizilir. (Sikloid eğrisi)

7. *Parametrik denklemleri $x = \frac{t}{t^2 - 1}$, $y = \frac{t^2}{t - 1}$ olan eğriyi çiziniz.*

x fonksiyonu t nin ∓ 1 ve y fonksiyonu t nin 1 değerlerin-

den başka diğer değerleri için tanımlı ve süreklidir. $t = 1$ ve $t = -1$ için $x \to \infty$ ve $t = 1$ için $y \to \infty$ ve $t \to \infty$ için $y \to \infty$, $x \to 0$ olmaktadır.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{t^2-2t}{(t-1)^2}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{t(t-2)(t+1)^2}{t^2+1}$$

olup $t = 1$ için $x \to \infty$ ve $y \to \infty$ dır.

$$\lim_{t\to 1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 1} t(t+1) = 2 = m \quad \text{(asimptodik doğrultu) ve}$$

$$\lim_{t\to 1} (y - mx) = \lim_{t\to 1} \frac{3t^2+2t-2}{2t} = \frac{3}{2} = n$$

olarak $y = 2x + \frac{3}{2}$ doğrusu asimptoddur.

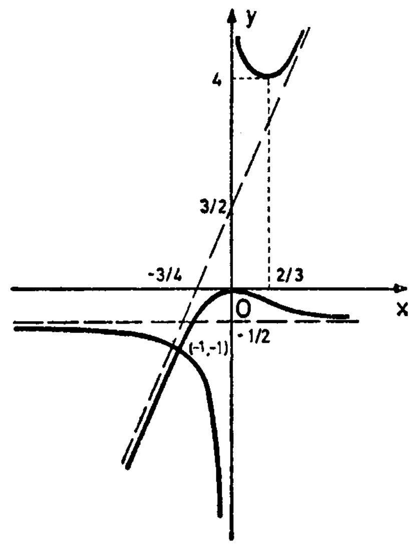
Eğrinin iki katlı noktası:

$$\frac{t_1}{t_1^2-1} = \frac{t_2}{t_2^2-1} \text{ den } t_1 t_2 = -1 \text{ ve}$$

$$\frac{t_1^2}{t_1-1} = \frac{t_2^2}{t_2-1} \text{ den } t_1 + t_2 = -1$$

ve bu ikisinden $t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$t_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ elde edilir ki buradan da $x = -1$, $y = -1$ bulunur. Bunlara göre $(-1, -1)$ noktası eğrinin iki katlı noktasıdır.



Şekil 78

Değişim tablosu:

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x'_t		$-$			$-$				$-$		
y'_t		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
					Maks.				Min.		

olup eğri şekil 78 de gösterilmiştir.

8. *Parametrik denklemleri* $x = \dfrac{t^2}{t+1}$, $y = \dfrac{1}{(t+1)(t-2)}$ *olan eğriyi çiziniz.*

x fonksiyonu t nin -1 ve y fonksiyonu t nin -1 ve 2 değerlerinden başka diğer değerleri için tanımlı ve süreklidir. $t=-1$ için $x \to \infty$, $y \to \infty$; $t = 2$ için $x = 4/3$, $y \to \infty$; $t = 0$ için $x = 0$, $y = -1/2$ olmaktadır;

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1-2t}{(t+1)^2(t-2)^2}$$ olup $t = 0$ ve $t = -2$ için $\dfrac{dx}{dt} = 0$ ve $t = \dfrac{1}{2}$ için $\dfrac{dy}{dt} = 0$ dır.

$t \to \infty$ halinde $y = 0$ olarak Ox ekseni yatay asimptoddur. $x \to 4/3$ halinde ise $y \to \infty$ olarak $x = 4/3$ doğrusu düşey asimptoddur. $t \to -1$ için $x \to \infty$, $y \to \infty$ dır.

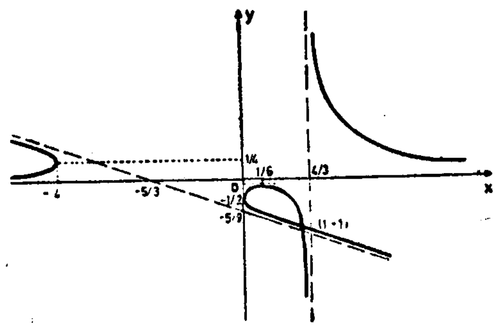
$$\lim_{t \to -1} \frac{y}{x} = -\frac{1}{3}$$

(asimptodik doğrultu) ve

$$\lim_{t \to -1} \left(y + \frac{1}{3} x \right) = -\frac{7}{9}$$

olarak $y = -\dfrac{1}{3} x - \dfrac{7}{9}$

doğrusu asimptoddur.



Şekil 79

Değişim tablosu :

t	$-\infty$		-2		-1		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
x_t'		$+$	0	$-$	∥	$-$	0	$+$	∥	$+$	∥	$+$	
y_t'		$+$	∥	$+$	∥	$+$	∥	$+$	0	$-$	∥	$-$	
x	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ∥ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{6}$	↗	$\frac{4}{3}$	↗	$+\infty$
y	0	↗	$\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$ ∥ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	$-\frac{4}{9}$ maks.	↘	$-\infty$ ∥ $+\infty$	↘	0

olup eğri şekil 79'da gösterilmiştir. $(+1, -1)$ noktası eğrinin iki katlı noktasıdır.

Parametrik denklemleri $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$ *olan eğriyi çiziniz.*

x fonksiyonu t nin 1 ve y fonksiyonu t nin ± 1 değerlerinden başka diğer değerleri için tanımlı ve süreklidir. $t = 1$ için $x \to \infty$ ve $y \to \infty$ dır. $t = -1$ için $x = -\dfrac{1}{2}$, $y \to \infty$; $t = 0$ için $x = 0$, $y = 0$ olmaktadır.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-(t^2+1)}{(t^2-1)^2} \text{ olup } t=0,\ t=2 \text{ değerleri}$$

için $\dfrac{dx}{dt} = 0$ ve $\dfrac{dy}{dt}$ daima negatiftir.

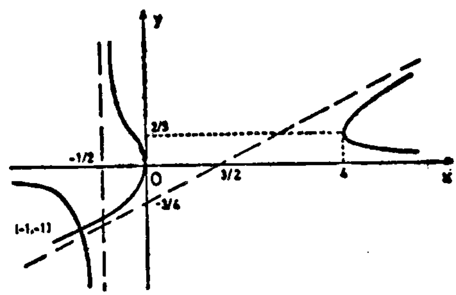
$t \to -\infty$ halinde $y \to 0$ olarak Ox ekseni yatay asimptoddur. $t \to -1$ halinde ise $y \to \infty$ olarak $x = -\dfrac{1}{2}$ doğrusu düşey asimptoddur. $t \to 1$ halinde ise $x \to \infty$, $y \to \infty$ dır.

$$\lim_{t \to 1} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

(asimptodik doğrultu) ve

$$\lim_{t \to 1}\left(y - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{3}{4}$$

olarak $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$ doğrusu asimptoddur.



Şekil 80

Değişim tablosu :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x_t'	1	+	|	+	0	−	|	−	0	+	1
y_t'	0	−	|	−	−1	−	|	−	|	−	0
x	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
y	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0

olup eğri şekil 80 de gösterilmiştir. (—1, —1) noktası eğrinin iki katlı noktasıdır.

Aşağıdaki denklem çiftlerinden $\frac{dy}{dx}$ *ve* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *türevlerini hesaplayınız.*

10. $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\theta$

11. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^3}$

12. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\theta$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a}\sec^4\theta \operatorname{cosec}\theta$

13. $x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta)$, $y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta - \sin\theta}$

14. $x = a\theta - b\sin\theta$, $y = a - b\cos\theta$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = \frac{b\sin\theta}{a - b\cos\theta}$

15. $x = 3e^{-t}$, $y = 2e^{t}$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}e^{2t}$

16. $x = t + 2$, $y = t^2 + 5t$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = 2t + 5$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$

17. $x = \cos 2t$, $y = \sin^2 t$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

18. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ Cevap : $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^3\theta}{a\theta}$

19. $x = \cos t$, $y = \sin t$ Cevap : $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3\cos t}{\sin^5 t}$

20. $x = e^{\sin t}$, $y = t\,e^{\sin t}$ Cevap : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos^2 t + \sin t}{\cos^3 t\, e^{\sin t}}$

21. $x = \operatorname{Arcsin} t$, $y = \operatorname{Arctg} t$ Cevap : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t(t^2 - 3)}{(1 + t^2)^2}$

Aşağıda parametrik denklemleri verilmiş olan eğrileri çiziniz.

22. $x = t^2$, $y = \log t$

23. $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

24. $x = a \sin 2t$, $y = a \sin 3t$

25. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$

26. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$

27. $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$

28. $x = \sin t$, $y = \dfrac{\sin t}{2+\cos t}$

29. $x = \dfrac{t^3 - t^2 + 2}{t}$, $y = \dfrac{t^3 - 1}{t+1}$

30. $x = t^2(3 - 2t)$, $y = t^3(3 - 2t)$

31. $x = 4t - \dfrac{1}{2} t^3$, $y = \dfrac{1}{2}(t^2 - 4)$

32. $x = 2a \operatorname{tg} \varphi$, $y = 2a \cos^2 \varphi$

33. $x = \dfrac{t}{t-1}$, $y = \dfrac{t-2}{t-1}$

34. $x = t(t-1)$, $y = \log t$

35. $x = e^t$, $y = \log t$

36. $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1-t^2}$

37. $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $y = \sin t$

7. KUTUPSAL DENKLEMLERDE EĞRİ ÇİZİMİ

1. *Kutupsal denklemi $r = a(1 - 2\cos\theta)$ olan eğriyi çiziniz.*

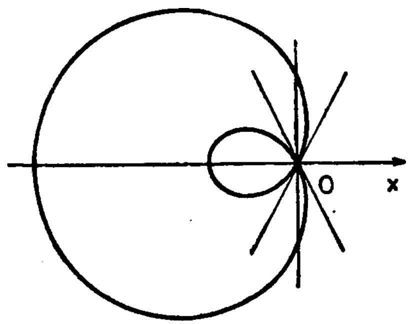
$f(-\theta) = f(\theta)$ olup kutupsal eksen simetri eksenidir. Buna göre incelemeyi $(0, \pi)$ aralığında yapmak kâfidir.

$r' = 2a \sin\theta$ olup $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ için $r' = 0$ dır.

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ için $r = 0$ olup $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

Değişim tablosu:

θ	0		π
r'	0	$+$	0
r	$-a$	$\nearrow$	$3a$
$\dfrac{r}{r'}$	∞		∞



Şekil 81

olup bu tabloya karşılık olan eğri çizilir ve kutupsal eksene göre simetriği alınırsa şekil 81 deki eğri elde edilir.

2. *Kutupsal denklemi $r = 2 - 4\sin\theta$ olan eğriyi çiziniz.*

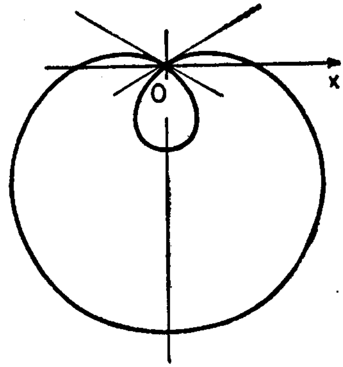
$f(\pi - \theta) = f(\theta)$ olup $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir. Buna göre incelemeyi $\left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığında yapmak kâfidir.

$r' = -4\cos\theta$ olup $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ ve $\theta = +\dfrac{\pi}{2}$ için $r'=0$ dır.

$\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ için $r=0$ olarak $\theta = \frac{\pi}{6}$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

Değişim tablosu:

θ	$-\frac{\pi}{2}$		$+\frac{\pi}{2}$
r'	0	$-$	0
r	6	↘	-2
$\frac{r}{r'}$	∞		∞



Şekil 82

olup bu tabloya karşılık olan eğri çizilir ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriği alınırsa şekil 82 deki eğri elde edilir.

3. $r = a\cos^3\frac{\theta}{3}$ *eğrisini çiziniz.*

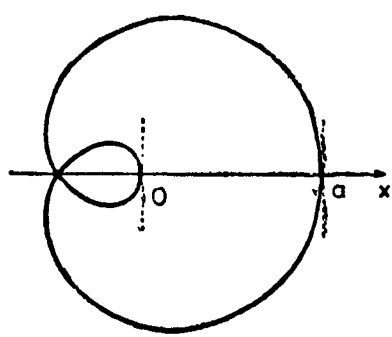
Peryod 6π ve $f(\theta + 3\pi) = -f(\theta)$ olup incelemeyi $(0, 3\pi)$ aralığında yaparsak eğrinin tamamını çizmiş oluruz. Diğer taraftan $f(-\theta) = f(\theta)$ olduğundan kutupsal eksen simetri eksenidir. Buna göre incelemeyi $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ aralığında yapmak kâfidir.

$r' = -a\cos^2\frac{\theta}{3}\sin\frac{\theta}{3}$ olup r', $\theta = 0$ için işaret değiştirerek sıfır olur.

$\theta = \frac{3\pi}{2}$ için $r = 0$ olarak $\theta = \frac{3\pi}{2}$ doğrusu, eğrinin kutuptaki teğetidir.

Değişim tablosu:

θ	0		$\frac{3\pi}{2}$
r'	0	$-$	0
r	a	↘	0
$\frac{r}{r'}$	∞		0



Şekil 83

olup bu tabloya karşılık olan eğri çizilir ve kutupsal eksene göre simetriği alınırsa şekil 83 deki eğri elde edilir.

4. $r = a\, sin^3 \dfrac{\theta}{3}$ *eğrisini çiziniz.*

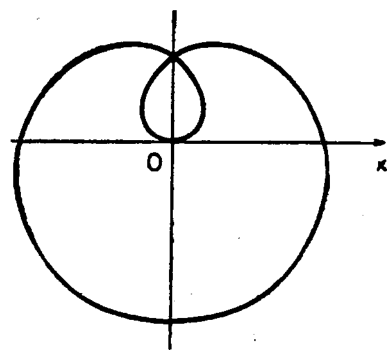
$f(3\pi + \theta) = -f(\theta)$ olup incelemeyi $(0, 3\pi)$ aralığında yaparsak eğrinin tamamını elde ederiz. Diğer taraftan, $f(-\theta) = -f(\theta)$ olup $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir. Buna göre, eğrinin yarısını elde etmek üzere, incelemeyi $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ aralığında yapmak kâfidir.

$r' = a \sin^2 \dfrac{\theta}{3} \cos \dfrac{\theta}{3}$ olup $\cos \dfrac{\theta}{3} = 0$, $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ için r' işaret değiştirerek sıfır olmaktadır.

$\theta = 0$ için $r = 0$ olarak $\theta = 0$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

Değişim tablosu :

θ	0		$\dfrac{3\pi}{2}$
r'	0	$+$	0
r	0	$\nearrow$	a
$\dfrac{r}{r'}$	0		∞



Şekil 84

olup bu tabloya karşılık olan eğri çizilir ve $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriği alınırsa Şekil 84 deki eğri elde edilir.

5. *Kutupsal denklemi* $r = a \cos^4 \dfrac{\theta}{4}$ *olan eğriyi çiziniz.*

$f(\theta + 4\pi) = f(\theta)$ olup peryod 4π dir. Diğer taraftan $f(-\theta) = f(\theta)$

olup kutupsal eksen simetri eksenidir. Buna göre, eğrinin yarısını elde etmek üzere, incelemeyi $(0, 2\pi)$ aralığında yapmak kâfidir.

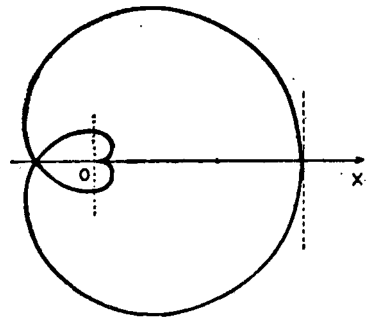
$r' = -a\cos^3\frac{\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}$ olup $\theta = 0$ için r' işaret değiştirerek sıfır olmaktadır.

$\theta = 2\pi$ için $r = 0$ olup $\theta = 2\pi$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

Değişim tablosu:

θ	0		2π
r'	0	$-$	0
r	a	$\searrow$	0
$\frac{r}{r'}$	∞		0

olup bu tabloya karşılık olan eğri çizilir ve kutupsal eksene göre simetriği alınırsa şekil 85'deki eğri elde edilir.



Şekil 85

6. *Kutupsal denklemi $r = a\cos 3\theta$ olan eğriyi çiziniz.*

$$f\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = a\cos 3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = a\cos(3\theta + \pi) = -a\cos 3\theta = -f(\theta)$$

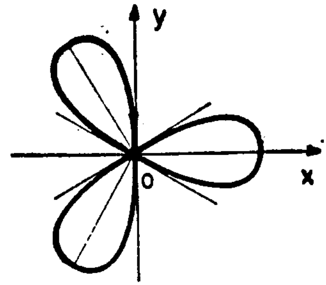
olup incelemeyi $\frac{\pi}{3}$ e eşit uzunluktaki bir aralıkta yapmak kâfidir. Bu incelemeye ait eğriyi negatif yönde $\pi - \frac{\pi}{3}$ kadar döndürmek ve bu döndürmeye eğri kendi üzerinde kapanıncaya kadar devam etmek suretile eğrinin tamamı elde edilir. Diğer taraftan $f(-\theta) = f(\theta)$ olduğundan kutupsal eksen simetri eksenidir. Buna göre, incelemeyi θ nın yalnız pozitif değerleri için yapmak kâfidir. $\frac{\pi}{3}$ e eşit uzunluktaki aralık $\left(-\frac{\pi}{6}, +\frac{\pi}{6}\right)$ aralığı olarak seçilirse inceleme aralığı $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ olur.

$r' = -3a\sin 3\theta$ olup inceleme aralığında r' daima negatiftir. $\theta = 0$ için $r' = 0$ dır.

$\theta = \frac{\pi}{6}$ için $r = 0$ olup $\theta = \frac{\pi}{6}$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

Değişim tablosu:

θ	0		$\frac{\pi}{6}$
r'		$-$	
r	a	$\searrow$	0
$\frac{r}{r'}$	∞		0



Şekil 86

olup eğri şekil 86'da gösterilmiştir.

7. *Kutupsal denklemi $r = a \sin 3\theta$ olan eğriyi çiziniz.*

$$f\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = a \sin 3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = a \sin(3\theta + \pi) = -a \sin 3\theta = -f(\theta)$$

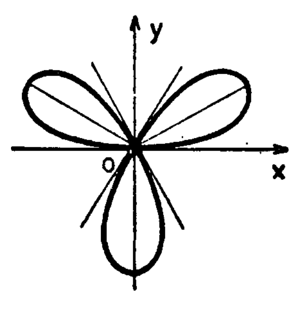
olup incelemeyi $\frac{\pi}{3}$ e eşit uzunluktaki bir aralıkta yapmalıdır. Buna ait eğri elde edilince, bu eğriyi negatif yönde $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ kadar döndürmek ve bu döndürmeye eğri kendi üzerinde kapanıncaya kadar devam etmek suretile eğrinin tamamı elde edilir. İnceleme aralığını $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ olarak seçelim.

$\sin 3\theta = 0$, $3\theta = 0$, $\theta = 0$ için $r = 0$ olup kutupsal eksen; eğrinin kutuptaki teğetidir.

$r' = 3a \cos 3\theta$ olup $\theta = \frac{\pi}{6}$ için $r' = 0$ dır.

Değişim tablosu:

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'		$+$	0	$-$	
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$\frac{r}{r'}$	0		∞		0



Şekil 87

olup eğri şekil 87 de gösterilmiştir.

8. *$r = a \cos 2\theta$ eğrisini çiziniz.*

$$f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos(2\theta + \pi) = -a \cos 2\theta = -f(\theta)$$

olup incelemeyi $\frac{\pi}{2}$ ye eşit uzunluktaki bir aralıkta yapmalıdır.

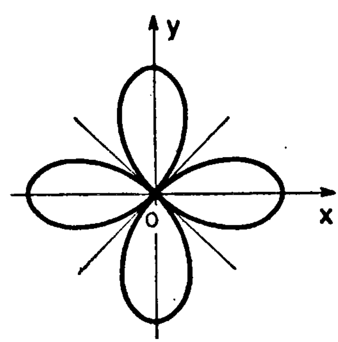
Bu incelemeye ait eğri, negatif yönde $\pi - \frac{\pi}{2}$ kadar üç defa döndürülürse eğrinin tamamı elde edilir. Diğer taraftan $f(-\theta) = f(\theta)$ olup kutupsal eksen simetri eksenidir. Buna göre incelemeyi θ nın yalnız pozitif değerleri için yapmak kâfidir. $\frac{\pi}{2}$ ye eşit uzunluktaki aralık $\left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$ olarak seçilirse inceleme aralığı $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ olur. Bu incelemeye ait eğrinin evvelâ kutupsal eksene göre simetriği alınır, sonra da yukarıda açıklanan döndürme yapılır.

$\cos 2\theta = 0$, $2\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ için $r = 0$ olup $\theta = \frac{\pi}{4}$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

$r' = -2a \sin 2\theta$ olup $\theta = 0$ için $r' = 0$ dır.

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r'		$-$	
r	a	$\searrow$	0
$\frac{r}{r'}$	∞		0



Şekil 88

olup eğri şekil 88 de gösterilmiştir.

9. *$r = a \sin 2\theta$ eğrisini çiziniz.*

$$f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = a \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = a \sin(2\theta + \pi) = -a \sin 2\theta = -f(\theta)$$

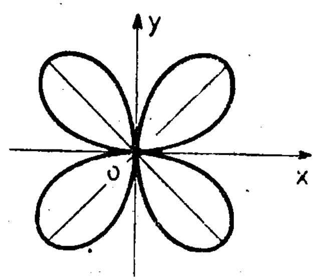
olup incelemeyi $\frac{\pi}{2}$ ye eşit uzunluktaki bir aralıkta yapmak kâfidir. Bu incelemeye ait eğri çizilir ve negatif yönde $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ kadar üç defa döndürülürse eğrinin tamamı elde edilir. İnceleme aralığını $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olarak seçelim.

$\sin 2\theta = 0$, $2\theta = 0$ için $r = 0$ olup kutupsal eksen, eğrinin kutuptaki teğetidir.

$r' = 2a\cos 2\theta$ olup $\theta = \frac{\pi}{4}$ için $r' = 0$ dır.

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r'		$+$	0	$-$	
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$\frac{r}{r'}$	0		∞		0



olup eğri şekil 89 da gösterilmiştir.

Şekil 89

10. *Kutupsal denklemi $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ olan eğriyi çiziniz.*

$r = \mp a\sqrt{\cos 2\theta}$ olup θ ya r in simetrik iki değeri karşılık gelir. Buna göre kutup simetri merkezidir. Bu sebepten yalnız $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ yı incelemek kâfidir. Bu incelemeye ait eğrinin, kutba göre simetriği alınırsa eğrinin tamamı elde edilir. Peryod π olup değişme aralığı olarak $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ seçilebilir. Ancak, $\cos 2\theta \geqslant 0$ olması gerektiğine göre $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\theta \leqslant +\frac{\pi}{2}$ yani $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant +\frac{\pi}{4}$ olmalıdır. Diğer taraftan $f(-\theta) = f(\theta)$ olup kutupsal eksen simetri eksenidir. Buna göre incelemeyi θ nın pozitif değerleri için yani $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ için yapmak kâfidir. Bu in-

celemeye ait eğri çizilir, evvelâ kutupsal eksene göre simetriği alınır ve sonra bu suretle elde edilen eğrinin de kutba göre simetriği alınırsa eğrinin tamamı elde edilir.

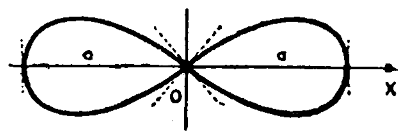
$\cos 2\theta = 0$, $2\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ için $r = 0$ olup $\theta = \frac{\pi}{4}$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

$$r' = \frac{-a \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

olup r' inceleme aralığında negatifdir. $\theta = 0$ için $r' = 0$ dır.

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r'		$-$	
r	a	$\searrow$	0
$\frac{r}{r'}$	∞		0



Şekil 90

olup eğri şekil 90 da gösterilmiştir.

11. *Kutupsal denklemi $r = a(\sin 2\theta + \cos 2\theta)$ olan eğriyi çiziniz.*

$$f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = a[\sin(2\theta + \pi) + \cos(2\theta + \pi)] = -a(\sin 2\theta + \cos 2\theta) = -f(\theta)$$

olarak incelemeyi $\frac{\pi}{2}$ ye eşit uzunluktaki bir aralıkta yapmanın kâfi olduğu görülür. Bu incelemeye göre elde edilen eğri negatif yönde $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ kadar döndürülür ve bu döndürmeye eğri kendi üzerinde kapanıncaya kadar devam edilirse eğrinin tamamı elde edilir.

$\sin 2\theta + \cos 2\theta = 0$ dan $\operatorname{tg} 2\theta = -1 = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$,

$2\theta = k\pi - \frac{\pi}{4}$ ve $\theta = k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ bulunur ki bu değerler için $r = 0$ dır.

$k = 0$ için $\theta = -\frac{\pi}{8}$ ve $k = 1$ için $\theta = \frac{3\pi}{8}$ olup incelemenin

$\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ aralığında yapılması halinde eğrinin bir ilmiğinin bulunacagı anlaşılır.

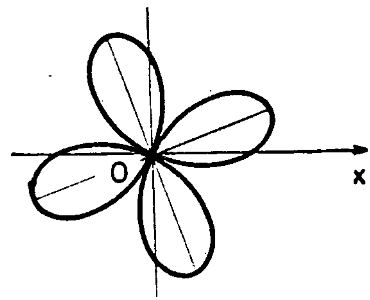
$$r' = 2a(\cos 2\theta - \sin 2\theta) \quad \text{olup} \quad \cos 2\theta - \sin 2\theta = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = 1 \quad \text{ve} \quad \theta = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

olup $\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$ aralığında r' yü sıfır kılan θ değerinin $\theta = \frac{\pi}{8}$ olduğu görülür.

Değişim tablosu :

θ	$-\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$
r'		+	0	−	
r	0	↗	$\sqrt{2}\,a$	↘	0
$\frac{r}{r'}$	0		∞		0



Şekil 91

olup eğri şekil 91 de gösterilmiştir.

12. $r = \dfrac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}$ *eğrisini çiziniz.*

Fonksiyonun peryodu 6π ve $f(3\pi + \theta) = -f(\theta)$ olduğundan incelemeyi $(0, 3\pi)$ aralığında yaparsak eğrinin tamamı çizilir. Diğer taraftan $f(-\theta) = f(\theta)$ olarak eğri kutupsal eksene göre simetriktir. Buna göre incelemeyi $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ aralığında yapmak kâfidir. Bu incelemeye göre elde edilen eğrinin kutupsal eksene göre simetriği alınırsa eğrinin tamamı elde edilmiş olur.

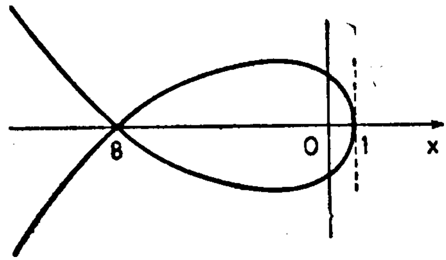
$\theta \to \frac{3\pi}{2}$ halinde $r \to \infty$ olmaktadır. Ancak $\lim\limits_{\theta \to \frac{3\pi}{2}} r \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$ mevcut olmadığından asimptod yoktur.

$$r' = \frac{\sin \frac{\theta}{3}}{\cos^4 \frac{\theta}{3}} \quad \text{olup} \quad \theta = 0 \quad \text{için} \quad r' = 0 \text{ dır.}$$

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{3\pi}{2}$
r'	0	$+$	∞
r	1	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{r}{r'}$	∞		

olup eğri şekil 92 de gösterilmiştir.



Şekil 92

13. *Kutupsal denklemi* $r = \dfrac{\sin 2\theta}{1 + \cos\theta}$ *olan eğriyi çiziniz.*

$f(-\theta) = -f(\theta)$ olup eğri $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. Buna göre incelemeyi $(0, \pi)$ aralığında yapmak kâfidir.

$\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $r = 0$ olup bu doğrular eğrinin kutuptaki teğetleridir.

$$r' = \frac{2(\cos^2\theta + \cos\theta - 1)}{1 + \cos\theta} \quad \text{olup} \quad \cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

için $r' = 0$ dır.

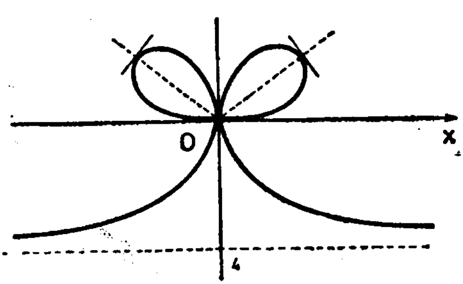
$\theta = \pi$ asimptodik doğrultuyu vermektedir. Asimptod altı :

$$d = \lim_{\theta \to \pi} r \sin(\theta - \pi) = \lim_{\theta \to \pi} - r \sin\theta$$

$$= \lim_{\theta \to \pi} \frac{-\sin 2\theta \sin\theta}{1 + \cos\theta} = 4 \quad \text{dür.}$$

Değişim tablosu :

θ	0		α		π
r'		$+$	0	$-$	
r	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$
$\frac{r}{r'}$	0		∞		



Şekil 93

olup eğri şekil 93 de gösterilmiştir.

14. $r = a(1 + \sin 2\theta)$ *eğrisini çiziniz.*

$$f(\theta + \pi) = a[1 + \sin(2\theta + 2\pi)] = a(1 + \sin 2\theta) = f(\theta)$$

olup kutup simetri merkezidir. Buna göre incelemeyi $(0, \pi)$ aralığında yapmalı ve bu suretle elde edilen eğrinin kutba göre simetriğini almalıdır.

$$1 + \sin 2\theta = 0, \ \sin 2\theta = -1, \ 2\theta = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4} \ \text{için} \ r = 0$$

olup $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

$$r' = 2a\cos 2\theta \ \text{olup} \ \theta = \frac{\pi}{4} \ \text{ve} \ \theta = \frac{3\pi}{4} \ \text{değerleri için} \ r' = 0$$

dır,

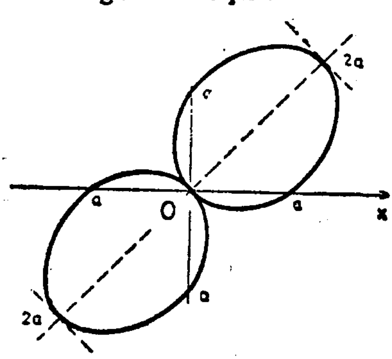
$$\frac{r}{r'} = \frac{1 + \sin 2\theta}{2\cos 2\theta} = \frac{(\cos\theta + \sin\theta)^2}{2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{2(\cos\theta - \sin\theta)}$$

olup $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ için $\dfrac{r}{r'} = 0$ dır.

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
r'		$+$	0	$-$	0	$+$	
r	a	↗	$2a$ maks	↘	0 min	↗	a
$\frac{r}{r'}$			∞		0		

olup eğri şekil 94 de gosterilmiştir.



Şekil 94

15. *$r = 2 + \sin 3\theta$ eğrisini çiziniz.*

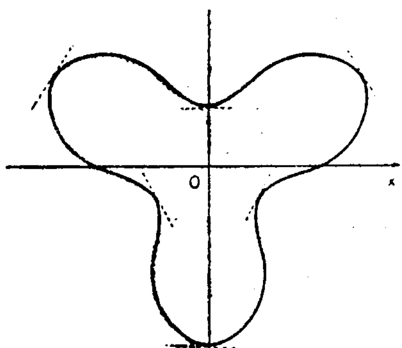
Peryod $\frac{2\pi}{3}$ olup incelemeyi $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ aralığında yaparak bu incelemeye karşılık olan eğriyi çizmeli ve bu eğriyi pozitif yönde iki defa döndürmek suretile eğrinin tamamını elde etmelidir.

$r' = 3\cos 3\theta$ olup $\theta = \frac{\pi}{6}$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $r' = 0$ dır.

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
r'	2	+	0	−	0	+	2
r	2	↗	3 maks	↘	1 min	↗	2
$\frac{r}{r'}$	1		∞		∞		1

olup eğri şekil 95 de gösterilmiştir.



Şekil 95

16. *Kutupsal denklemi $r = a(2 + \cos 2\theta)$ olan eğriyi çiziniz ve bu eğrinin kutupsal eksene dik ve paralel olan teğetlerinin bulunduğu noktalarını belirtiniz.*

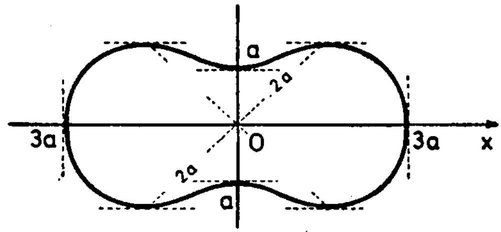
$f(-\theta) = f(\theta)$ olup kutupsal eksen ve $f(\pi - \theta) = f(\theta)$ olup $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir. Bunlara göre incelemeyi $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında yapmak kâfidir. Bu incelemeye ait eğri çizilir ve ev-

velâ kutupsal eksene göre simetriği alınır ve sonra da elde edilen bu eğrinin $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriği alınırsa eğrinin tamamı elde edilir.

$r' = -2a \sin 2\theta$ olup $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ değerleri için $r' = 0$ dır,

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
r'	0	$-$	0
r	$3a$	$\searrow$	a
$\frac{r}{r'}$	∞		∞



Şekil 96

olup eğri şekil 96 da gösterilmiştir.

Şekilden de görüleceği gibi $(3a, 0)$ ve $(3a, \pi)$ noktalarındaki teğetler kutupsal eksene diktir.

Kutupsal eksene paralel teğetler için $\alpha = 0$ olmalıdır.

$$\alpha = \psi + \theta = 0 \quad \text{dan} \quad \psi = -\theta \quad \text{veya} \quad \operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg}\theta$$

bulunur. Diğer taraftan :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{r'} = \frac{a(2 + \cos 2\theta)}{-2a \sin 2\theta}$$

olup $-\operatorname{tg}\theta$ ya eşitlenirse :

$$-\operatorname{tg}\theta = \frac{a(2 + \cos 2\theta)}{-2a \sin 2\theta} \; ; \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2 + \cos 2\theta}{2 \sin 2\theta}$$

$$2 \sin 2\theta \sin\theta = \cos\theta\,(2 + \cos 2\theta)$$

$$\cos\theta\,(2 + \cos 2\theta) - 4 \sin^2\theta \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta\,(2 + 1 - 2\sin^2\theta - 4\sin^2\theta) = 0$$

$$\cos\theta\,(3 - 6\sin^2\theta) = 0$$

elde edilir. Buradan :

$$\cos\theta = 0 \quad \text{dan} \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta = +\frac{\pi}{2} \qquad \text{ve}$$

$3-6\sin^2\theta = 0$ dan $\sin\theta = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, $\theta = +\dfrac{\pi}{4}$, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ ve $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ bulunur. Bunlara göre:

$\left(a, -\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left(a, +\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left(2a, -\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\left(2a, \dfrac{\pi}{4}\right)$; $\left(2a, -\dfrac{3\pi}{4}\right)$; $\left(2a, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ noktalarındaki teğetler kutupsal eksene paraleldir.

17. *Kutupsal denklemi* $r = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ *olan eğriyi çiziniz ve bu eğrinin kartezyen denklemini bulunuz.*

$f(\pi-\theta) = -f(\theta)$ olup eğri kutupsal ekene göre simetriktir. Buna göre incelemeyi $\left(-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığında yapmak kâfidir.

$\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ için $r \to \infty$ olup $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ asimptodik doğrultuyu verir.

Asimptod altı ise:

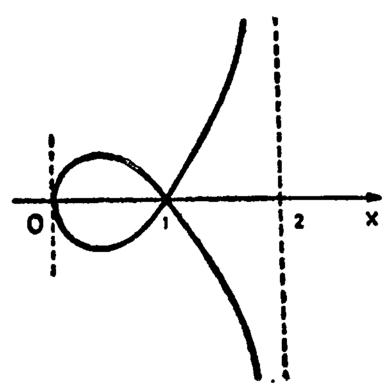
$$d = \lim_{\theta\to\pi/2} r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\theta\to\pi/2} -\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \lim_{\theta\to\pi/2} -(1+\sin\theta)$$
$$= -2 \text{ dir.}$$

$$r' = \frac{-\sin\theta(1-\sin\theta)+\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)^2} = \frac{1}{1-\sin\theta}$$ olup daima pozitiftir.

$$\frac{r}{r'} = \cos\theta$$ ve

Değişim tablosu:

θ	$-\dfrac{\pi}{2}$		0		$+\dfrac{\pi}{2}$
r'			$+$		
r	0	↗	1	↗	$+\infty$
$\dfrac{r}{r'}$	0				



Şekil 97

olup eğri şekil 97 de gösterilmiştir.

Eğrinin kartezyen denklemi ise :

$$x = r\cos\theta \quad \text{ve} \quad y = r\sin\theta \quad \text{olup}$$

$$r = \frac{x}{r-y}, \quad r^2 - ry = x \quad \text{ve} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{olarak}$$

$$x^2 + y^2 - y\sqrt{x^2+y^2} = x$$

$$x^2 + y^2 - x = y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^4 + y^4 + x^2 - 2x^3 + 2x^2y^2 - 2xy^2 = x^2y^2 + y^4$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2y^2 + x^2 - 2xy^2 = 0$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = y^2(2x - x^2)$$

$$y^2 = \frac{x(x-1)^2}{2-x} \quad \text{bulunur.}$$

18. *Kutupsal denklemi* $r = \sin\theta + \dfrac{1}{\sin\theta}$ *olan eğriyi çiziniz.*

$f(\pi - \theta) = f(\theta)$ olup $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir. Diğer taraftan $f(\pi + \theta) = -f(\theta)$ olduğundan $(0, \pi)$ aralığında eğrinin tamamı çizilir. Simetriden ötürü incelemeyi $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığında yapmak ve elde edilen eğrininin $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriğini alarak eğrinin tamamını elde etmek mümkündür.

$\theta \to 0$ halinde $r \to \infty$ olup $\theta = 0$ asimptodik doğrultuyu verir. Asimptod altı ise :

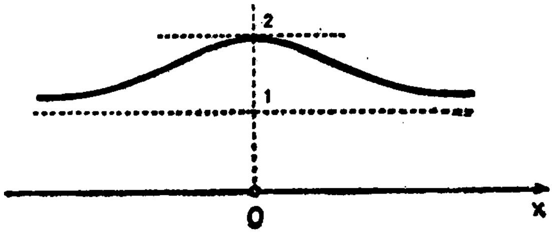
$$d = \lim_{\theta \to 0} r\sin\theta = \lim_{\theta \to 0} (\sin^2\theta + 1) = 1 \quad \text{dir.}$$

$$r' = \cos\theta - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{olup} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{için } r' = 0 \text{ dır.}$$

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
r'		$-$	
r	$+\infty$	$\searrow$	2
$\frac{r}{r'}$			∞

olup eğri şekil 98 de gösterilmiştir.



Şekil 98

19. $r = tg\,\dfrac{\theta}{2}$ *eğrisini çiziniz.*

$f(-\theta) = -\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = -f(\theta)$ olup $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusu simetri eksenidir. Buna göre, incelemeyi θ nın pozitif değerleri için yapmak kâfidir. Bu incelemeye ait eğri çizilir ve $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriği alınırsa eğrinin tamamı elde edilir. 2π ye eşit uzunluktaki aralığı $(-\pi, +\pi)$ olarak seçersek simetriden ötürü inceleme aralığı $(0, \pi)$ olur.

$\theta = 0$ için $r = 0$ olup $\theta = 0$ doğrusu eğrinin kutuptaki teğetidir.

$$r' = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)$$

olup daima pozitifdir.

$\theta \to \pi$ halinde $r \to \infty$ dur. O halde $\theta = \pi$ asimptodik doğrultudur.

Asimptod altı :

$$\lim_{\theta\to\pi} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin(\theta - \pi) = \lim_{\theta\to\pi}\left(-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)$$

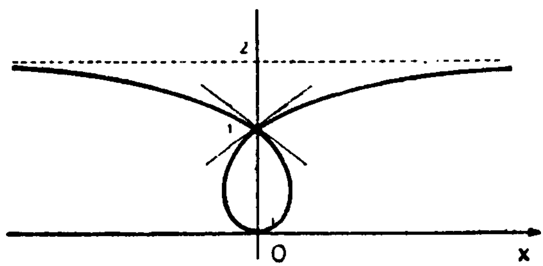
$$= \lim_{\theta\to\pi}\left(-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = -2$$

dir.

Değişim tablosu :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
r'			$+$		
r	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{r}{r'}$	0		1		

olup eğri şekil 99 da gösterilmiştir.



Şekil 99

Aşağıda kutupsal denklemleri verilen eğrileri çiziniz.

20. $r = \sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$

21. $r = a\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

22. $r = a\,\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

23. $r = \frac{a}{\sin\frac{\theta}{2}}$

24. $r = \cos\frac{\theta}{2}$

25. $r = \frac{\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

26. $r = \frac{\cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$

27. $r = 1 + \operatorname{tg}\theta$

28. $r = 2a\operatorname{tg}\theta\sin\theta$

8. SONSUZ KÜÇÜKLER, DİFERANSİEL, EĞRİLİK

1. *α bir sonsuz küçük olduğuna göre $tg\,\alpha$ nın mertebesini ve asal kısmını bulunuz.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=1$$

olup α ile $\operatorname{tg}\alpha$ ayni mertebeden sonsuz küçüklerdir ve $\operatorname{tg}\alpha$ nın asal kısmı α dır.

2. *α bir sonsuz küçük olduğuna göre $\beta=2\alpha+3\alpha^2$ nin mertebesini ve asal kısmını bulunuz.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha+3\alpha^2}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}(2+3\alpha)=2$$

olup β ve α ayni mertebeden sonsuz küçüklerdir ve β nın asal kısmı 2α dır.

3. *α bir sonsuz küçük olduğuna göre $\beta=\alpha\sin\alpha$ nın mertebesini ve asal kısmını bulunuz.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\sin\alpha=0$$

olup β, α ya göre daha yüksek mertebeden sonsuz küçüktür.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha\sin\alpha}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

olarak β, α ya göre ikinci mertebeden bir sonsuz küçüktür ve asal kısmı α^2 dir.

4. *α bir sonsuz küçük olduğuna göre $\beta=\sec\alpha-\cos\alpha$ bir sonsuz küçük müdür? β bir sonsuz küçük ise mertebesini ve asal kısmını bulunuz.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\beta=\lim_{\alpha\to 0}(\sec\alpha-\cos\alpha)=0$$

olarak β bir sonsuz küçüktür.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\,\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\alpha\sec\alpha}{\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\sin\alpha\sec\alpha=0$$

olup β, α dan daha yüksek mertebeden bir sonsuz küçüktür. Diğer taraftan :

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\sec\alpha=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\sec\alpha=1$$

olup β, α ya göre ikinci mertebeden bir sonsuz küçüktür ve asal kısmı α^2 dir.

5. *α ve β, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=1$ olacak şekilde birer sonsuz küçük ise β—α nın α ve β dan daha yüksek mertebeden sonsuz küçük olduğunu gösteriniz.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=0$$

olup β — α, α ve β dan daha yüksek mertebeden bir sonsuz küçüktür.

6. *α bir sonsuz küçük ise $\beta=\sqrt[3]{2\alpha+6\alpha^3+\alpha^4}$ ile α nın mertebelerini karşılaştırınız.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sqrt[3]{2\alpha+6\alpha^3+\alpha^4}}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}+6+\alpha}=\infty$$

olup β, α dan daha küçük mertebeden bir sonsuz küçüktür.

Aşağıdaki sonsuz küçüklerin mertebelerini karşılaştırınız.

7. $\beta=2\alpha+3\alpha^2$, α — Cevap : α ve β ayni mertebeden sonsuz küçüklerdir.

8. $\beta=\sin^2\alpha$. $tg^2\alpha$ — Cevap : Ayni mertebeden sonsuz küçüklerdir.

9. $\beta = 1 - \cos\alpha$, α Cevap : β, α dan daha yüksek mertebeden sonsuz küçüktür.

10. $\beta = \sin\alpha - \alpha$, α Cevap : β, α dan daha yüksek mertebeden sonsuz küçüktür.

11. $\beta = \operatorname{tg}\alpha - \alpha$, α Cevap : " " "

12. $\beta = 1 - \sec^2\alpha$, α Cevap : " " "

13. $\beta = \sqrt[4]{\alpha^7 + 3\alpha^5}$, α Cevap : " " "

14. $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, x Cevap : ayni mertebeden sonsuz küçüklerdir.

15. $y = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a - x}$ *den dy diferansielini hesaplayınız.*

$$dy = \frac{(a-x)\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}(-1)}{(a-x)^2}\,dx = \frac{a\,dx}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{dir.}$$

16. $\cos(x - y) + x + y = 0$ *dan dy diferansielini hesaplayınız.*

$$-\sin(x-y)(dx - dy) + dx + dy = 0$$

$$[1 + \sin(x-y)]\,dy - [\sin(x-y) - 1]\,dx = 0 \quad \text{ve}$$

$$dy = \frac{\sin(x-y) - 1}{\sin(x-y) + 1}\,dx \quad \text{dir.}$$

Aşağıdaki fonksiyonların diferansiellerini hesaplayınız.

17. $y = \sin 2x$ Cevap ; $dy = 2\cos 2x\,dx$

18. $y = \log(x+1)$ Cevap : $dy = \dfrac{dx}{x+1}$

19. $y = \sqrt{1+x^2}$ Cevap : $dy = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

20. $y = x\cos x$ Cevap : $dy = (\cos x - x\sin x)\,dx$

21. $y = \operatorname{Arctg}(\log x)$ Cevap : $dy = \dfrac{dx}{x(\log^2 x + 1)}$

22. $y = (1 - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ Cevap : $dy = \dfrac{\sin\theta\,d\theta}{2\sqrt{1-\cos\theta}}$

23. $y = \log \operatorname{Arcsin} ax$ Cevap : $dy = \dfrac{a\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}\operatorname{Arc}\sin ax}$

24. $f(x) = a^{\log x}$ Cevap : $df(x) = \dfrac{\log a\, a^{\log x}}{x}\,dx$

Aşağıdaki eşitliklerden dy diferansiellerini hesaplayınız.

25. $x^2 - y^2 = a^2$ Cevap : $dy = \frac{x}{y}\,dx$

26. $e^x - \sin y = 0$ Cevap : $dy = \frac{e^x}{\cos y}\,dx$

27. $x^2y - xy^3 - x + y = 0$ Cevap : $dy = \frac{y^3 - 2xy + 1}{x^2 - 3xy^2 + 1}\,dx$

28. $y(1 + \operatorname{tg} x) - \sin x = 0$ Cevap : $dy = \frac{\cos x - y \sec^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}\,dx$

Aşağıdaki eşitliklerden dr diferansiellerini hesaplayınız.

29. $r^2 - a^2 \cos 2\theta = 0$ Cevap : $dr = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{r}\,d\theta$

30. $r^2\theta = a^2$ Cevap : $dr = -\frac{r\,d\theta}{2\theta}$

31. $r - a \sec^2 \frac{\theta}{2} = 0$ Cevap : $dr = a \sec^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\,d\theta$

32. $r^2 \cos\theta - a^2 \sin 3\theta = 0$ Cevap : $dr = \frac{r^2 \sin\theta + 3a^2 \cos 3\theta}{2r \cos\theta}\,d\theta$

33. *$y = \log \sec x$ den ds yay diferansielini hesaplayınız.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sec x} = \operatorname{tg} x$$

olup :

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,dx = \sec x\,dx$$

dir.

34. *$x = 3\cos 4t$, $y = 3\sin 4t$ parametrik denklemlerinden ds yay diferansielini hesaplayınız.*

$$\frac{dx}{dt} = -12\sin 4t \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = 12\cos 4t$$

olup :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{12^2 \sin^2 4t + 12^2 \cos^2 4t}\;dt = 12\,dt$$

dir.

35. $x = a\sin^3 t\,,\quad y = a\cos^3 t$ *parametrik denklemlerinden ds yay diferansielini hesaplayınız.*

$$\frac{dx}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t$$

olup:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(3a\sin^2 t\cos t)^2 + (-3a\cos^2 t\sin t)^2}\,dt \\ &= \sqrt{9a^2\sin^4 t\cos^2 t + 9a^2\cos^4 t\sin^2 t}\,dt \\ &= \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = 3a\sin t\cos t\,dt \end{aligned}$$

dir.

36. $r = a\sec^2\frac{\theta}{2}$ *kutupsal denkleminden ds yay diferansielini hesaplayınız.*

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta \quad \text{ve} \quad r' = a\sec^2\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

olup:

$$ds = \sqrt{a^2\sec^4\frac{\theta}{2} + a^2\sec^4\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = a\sec^3\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

dır.

Aşağıdaki fonksiyonlardan ds yay diferansielini hesaplayınız.

37. $y = x^2$ — Cevap: $ds = \sqrt{1+4x^2}\,dx$

38. $y = \sin x$ — Cevap: $ds = \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

39. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ — Cevap: $ds = \frac{x^4+1}{2x^2}\,dx$

40. $x = y^{3/2}$ — Cevap: $ds = \sqrt{1+\frac{9y}{4}}\,dy$

41. $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ — Cevap: $ds = \sqrt{\frac{x+y}{y}}\,dy$

42. $x = 2t^2;\ y = t^3$ — Cevap: $ds = t\sqrt{16+9t^2}\,dt$

43. $x = t - \sin t;\ y = 1-\cos t$ — Cevap: $ds = \sqrt{2-2\cos t}\,dt = 2\sin\frac{t}{2}dt$

44. $x = a\cos\theta\,;\ y = a\sin\theta$ — Cevap: $ds = a\,d\theta$

45. $r = 2a\cos\theta$ — Cevap: $ds = 2a\,d\theta$

46. $r = 2(1 + \cos\theta)$ Cevap : $ds = 4\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

47. $r = 3 + 2\cos\theta$ Cevap : $ds = \sqrt{13+12\cos\theta}\,d\theta$

48. *$y = \operatorname{Arcsin}\log x$ eğrisinin $(1, 0)$ noktasındaki eğriliğini ve eğrilik yarı çapını bulunuz.*

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \text{ve} \quad R = \frac{1}{K}$$

formüllerinde :

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} \quad \text{ve} \quad y'' = \frac{\log^2 x + \log x - 1}{x^2(1-\log^2 x)^{3/2}}$$

olup $x = 1$ için $y' = 1$, $y'' = -1$ olarak :

$$K = \frac{-1}{(1+1)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{ve} \quad R = -2\sqrt{2}$$

bulunur.

49. *$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını hesaplayınız.*

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''};$$

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} \quad \text{ve} \quad y'' = \frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}$$

olarak :

$$R = \frac{\left(1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}\right)^{3/2}}{\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}} = \frac{\left(\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}\right)^{3/2}}{\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}} = \frac{a}{x}\cdot\frac{3x^{4/3}y^{1/3}}{a^{2/3}} = 3(a\,x\,y)^{1/3}$$

bulunur.

50. *Parametrik denklemleri :*

$$x = a\,\mathrm{ch}\,2t \;; \quad y = a\,\mathrm{sh}\,2t$$

olan eğrinin herhangibir noktasındaki eğriliğini hesaplayınız.

$$\frac{dx}{dt} = 2a\,\mathrm{sh}\,2t\,, \quad \frac{dy}{dt} = 2a\,\mathrm{ch}\,2t\,, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{ch}\,2t}{\mathrm{sh}\,2t} \quad \text{ve}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{2\,\mathrm{sh}^2 2t - 2\,\mathrm{ch}^2 2t}{2a\,\mathrm{sh}^3 2t} = -\frac{1}{a\,\mathrm{sh}^3 2t}$$

olarak :

$$K = -\frac{1}{a(\mathrm{sh}^2 2t + \mathrm{ch}^2 2t)^{3/2}}$$

bulunur.

51. *Parametrik denklemleri :*

$$x = \frac{a}{t}\cos t \;; \qquad y = \frac{a}{t}\sin t$$

olan eğrinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{t^2}\cos t - \frac{a}{t}\sin t = \frac{a(-\cos t - t\sin t)}{t^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{a}{t^2}\sin t + \frac{a}{t}\cos t = \frac{a(-\sin t + t\cos t)}{t^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t\cos t - \sin t}{-t\sin t - \cos t} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt},$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{(\cos t - t\sin t - \cos t)(-t\sin t - \cos t) - (-\sin t - t\cos t + \sin t)(t\cos t - \sin t)}{(-t\sin t - \cos t)^2}$$

$$= \frac{t^2}{(-t\sin t - \cos t)^2}$$

olup :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2}{(-t\sin t - \cos t)^2} : \frac{a(-t\sin t - \cos t)}{t^2} = \frac{t^4}{a(-t\sin t - \cos t)^3}$$

olarak

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{(t\cos t - \sin t)^2}{(-t\sin t - \cos t)^2} = \frac{t^2 + 1}{(-t\sin t - \cos t)^2} \quad \text{ve}$$

$$R = \frac{(t^2+1)^{3/2}}{(-t\sin t - \cos t)^3} : \frac{t^4}{a(-t\sin t - \cos t)^3} = \frac{a(t^2+1)^{3/2}}{t^4}$$

bulunur.

52. $r = a(1 - 2\cos\theta)$ *eğrisi üzerindeki minimum eğriliği bulunuz.*

$$r' = 2a\sin\theta \;; \qquad r'' = 2a\cos\theta$$

olarak

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} = \frac{a^2(1-2\cos\theta)^2 + 8a^2\sin^2\theta - a(1-2\cos\theta)2a\cos\theta}{[a^2(1-2\cos\theta)^2 + 4a^2\sin^2\theta]^{3/2}}$$

$$= \frac{9 - 6\cos\theta}{a(5-4\cos\theta)^{3/2}}$$

bulunur. Bunun minimum değerini elde etmek üzere K' türevini hesaplarsak :

$$K' = \frac{6\sin\theta(5-4\cos\theta)^{3/2} - 3/2(5-4\cos\theta)^{1/2}4\sin\theta\,(9-6\cos\theta)}{a(5-4\cos\theta)^3}$$

$$= \frac{6\sin\theta\,(-4+2\cos\theta)}{a(5-4\cos\theta)^{5/2}}$$

bulunur ki $\theta = 0$, $\theta = \pi$ için $K' = 0$ olur. K' yü minimum kılan θ değeri $\theta = \pi$ olup bu değer için :

$$K_{min} = \frac{5}{9a}$$

bulunur.

53. *$r^2 = a^2\cos 2\theta$ eğrisinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını hesaplayınız.*

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

olup

$2rr' = -2a^2\sin 2\theta$, $\quad rr' = -a^2\sin 2\theta \quad$ ve $\quad r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

olarak

$$r' = \frac{-a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \qquad r'^2 = \frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$$

bulunur. Diğer taraftan $rr' = -a^2\sin 2\theta$ ifadesinden bir daha türev alarak :

$$rr'' + r'^2 = -2a^2\cos 2\theta$$

$$rr'' = -2a^2\cos 2\theta - \frac{a^2\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$r^2 + r'^2 = a^2 \cos 2\theta + \frac{a^2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$$

$$r^2 + 2r'^2 - r\,r'' = a^2 \cos 2\theta + \frac{2a^2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + 2a^2 \cos 2\theta + \frac{a^2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{3a^2}{\cos 2\theta}$$

ve

$$R = \frac{\left(\dfrac{a^2}{\cos 2\theta}\right)^{3/2}}{\dfrac{3a^2}{\cos 2\theta}} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a^2}{3r}$$

bulunur.

54. $y = x^3 + 2x - 1$ eğrisinin $(0, -1)$ noktasındaki eğriliğini hesaplayınız.
Cevap : 0

55. $y = \log x$ eğrisinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını hesaplayınız.
Cevap : $-\dfrac{(x^2+1)^{3/2}}{x}$

56. $y = \log x$ eğrisine ait minimum eğrilik yarıçapını bulunuz.
Cevap : $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

57. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ eğrisinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını bulunuz.
Cevap : $-4a \sin\dfrac{\theta}{2}$

58. $x^2 + xy + y^2 = 12$ eğrisi üzerindeki en büyük eğriliği hesaplayınız.
Cevap : $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

59. $y = a \operatorname{Arccos}\dfrac{a-x}{a} \pm \sqrt{2ax - x^2}$ eğrisinin $x = \dfrac{a}{2}$ apsîsli noktasındaki eğrilik yarıçapını bulunuz.
Cevap : $2a$

60. $y = e^{-2x} \sin 3x$ eğrisinin orijindeki eğrilik yarıçapını bulunuz.
Cevap : $\dfrac{5}{6}\sqrt{10}$

61. $y = a\, e^{-\frac{x}{a}}$ eğrisinin $x = \mp a$ apsisli noktalarındaki eğrilik yarıçaplarının çarpımının $a^2(e + e^{-1})^3$ e eşit olduğunu gösteriniz.

62. $r = a(2\cos\theta - 1)$ eğrisinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını bulunuz.

Cevap ; $\dfrac{a(5-4\cos\theta)^{3/2}}{9-6\cos\theta}$

63. $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ lemniskat eğrisinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını bulunuz.

Cevap : $\dfrac{2a^2}{3r}$

64. Parametrik denklemleri $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ olan eğrinin herhangibir noktasındaki eğrilik yarıçapını hesaplayınız.

Cevap : $3a\cos t\sin t$

65. *$2xy + x + y = 4$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki eğrilik dairesinin denklemini bulunuz.*

$$\text{Eğrilik yarı çapı} = R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

ve eğrilik merkezinin koordinatları:

$$\alpha = x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''} \quad , \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

olup

$2y + 2xy' + 1 + y' = 0$ ve $x = 1$, $y = 1$ için $y' = -1$; $1 + y'^2 = 2$; ve

$4y' + 2xy'' + y'' = 0$ olup $x = 1$, $y = 1$ için $y'' = \dfrac{4}{3}$ olup:

$$R = \frac{3\sqrt{2}}{2} \;,\quad \alpha = \frac{5}{2} \;,\quad \beta = \frac{5}{2}$$

bulunur. Bunlara göre eğrilik dairesinin deklemi:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

dir.

66. *Parametrik denklemleri:*

$$x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) \quad , \quad y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$

olan eğrinin mebsut'unun kartezyen denklemini bulunuz.

Mebsutun parametrik denklemleri:

$$\alpha = x - \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''} \qquad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

olup burada:

$$\frac{dx}{d\varphi} = a\varphi\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = a\,\varphi\sin\varphi \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{dy'/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{a\,\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{a\,\varphi\cos^3\varphi}$$

dir. O halde:

$$1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

olarak:

$$\alpha = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) - \frac{\dfrac{1}{\cos^2\varphi}\operatorname{tg}\varphi}{\dfrac{1}{a\varphi\cos^3\varphi}} = a\cos\varphi$$

$$\beta = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \frac{\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{\dfrac{1}{a\varphi\cos^3\varphi}} = a\sin\varphi$$

bulunur. Bu şekilde elde edilen $\alpha = a\cos\varphi$, $\beta = a\sin\varphi$ parametrik denklemlerinden φ parametresi yok edilerek:

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2$$

şeklinde istenilen kartezyen denklem bulunmuş olur.

67. *$y^2 = 2px$ parabolunun mebsutunun denklemini bulunuz.*

$y^2 = 2px$ den $2yy' = 2p$, $y' = \dfrac{p}{y}$; $y'' = -\dfrac{p^2}{y^3}$ olup:

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{\dfrac{p}{y}\left(1 + \dfrac{p^2}{y^2}\right)}{-\dfrac{p^2}{y^3}} = x + \frac{y^2}{p} + p = 3x + p$$

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = y - \frac{y^3}{p^2} - y = -\frac{y^3}{p^2}$$

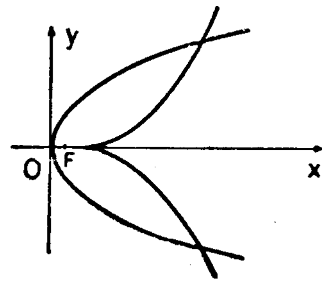
bulunur. Bunlara göre mebsut eğrisinin parametrik denklemleri :

$$\alpha = 3x + p \ ; \quad \beta = -\frac{y^3}{p^2}$$

dir. Bunlardan x ve y yokedilerek :

$$p\,\beta^2 = \frac{8}{27}(\alpha - p)^3$$

kartezyen denklemi bulunur. Parabol ve mebsut eğrisi Şekil 100 de ayni eksen takımı üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 100

68. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *elipsinin mebsutunun denklemini bulunuz.*

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \ , \quad 2b^2x + 2a^2yy' = 0 \ , \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y} \ \text{ve}$$

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3} \quad \text{olarak :}$$

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{-\frac{b^2x}{a^2y}\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = x - \frac{xy^2}{b^2}\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)$$

$$\alpha = x - \frac{xy^2}{b^2} - \frac{b^2x^3}{a^4} = \frac{(b^2-y^2)x}{b^2} - \frac{b^2x^3}{a^4} = \frac{(a^4b^2 - a^4y^2 - b^4x^2)x}{a^4b^2}$$

$$\alpha = \frac{(a^2b^2x^2 - b^4x^2)x}{a^4b^2} = \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4} \ ; \quad \text{ve}$$

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = y - \frac{a^2y^3}{b^4} - \frac{x^2y}{a^2}$$

$$= \frac{a^2b^4y - a^4y^3 - b^4x^2y}{a^2b^4}$$

$$\beta = \frac{a^2b^2y^3 - a^4y^3}{a^2b^4} = -\frac{(a^2-b^2)y^3}{b^4}$$

dir. Bunlara göre mebsutun parametrik denklemleri :

$$\alpha = \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4} \quad , \quad \beta = -\frac{(a^2-b^2)y^3}{b^4}$$

dir. Bunlardan x ve y yokedilirse mebsutun:

$$(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}$$

şeklindeki kartezyen denklemi elde edilir.

69. *Parametrik denklemleri :*

$$x = 2\cos t + \cos 2t \ , \ y = 2\sin t + \sin 2t$$

olan eğrinin mebsutunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t - 2\sin 2t \ ; \ \frac{dy}{dt} = 2\cos t + 2\cos 2t$$

ve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t + \cos 2t}{\sin t + \sin 2t} \ ; \ \frac{dy'}{dt} = \frac{3+3\cos t}{(\sin t + \sin 2t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{2}\frac{1+\cos t}{(\sin t + \sin 2t)^3}$$

olarak

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \ , \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

formüllerinden :

$$\alpha = \frac{1}{3}(2\cos t - \cos 2t) \ , \quad \beta = \frac{1}{3}(2\sin t - \sin 2t)$$

denklemleri elde edilir.

70. $y = \sin x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktasındaki eğrilik dairesini belirtiniz.

Cevap : $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

71. $y = e^x$ eğrisinin $x = 0$ apsisli noktasındaki eğrilik dairesini bulunuz.

Cevap : $(x+2)^2 + (x-3)^2 = 8$

72. $y = x^2 - 6x + 10$ eğrisinin (3, 1) noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Cevap : $\left(3, \frac{3}{2}\right)$

73. $y = \frac{1}{x}$ eğrisinin $x = 1$ apsişli noktasındaki eğrilik dairesini belirtiniz.

Cevap : $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$

74. $x^2 = y^2(y+1)$ eğrisinin $y = -1$ ordinatlı noktasındaki eğrilik dairesini belirtiniz.

Cevap : $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

75. Parametrik denklemleri $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$ olan elipsin mebsutunun kartezyen denklemini belirtiniz.

Cevap : $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{6}\right)^{2/3} = 1$

76. Parametrik denklemleri $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ olan eğrinin mebsutunun denklemini bulunuz.

Cevap : $\alpha = a(\theta + \sin\theta)$, $\beta = -a(1-\cos\theta)$

77. Parametrik denklemleri $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = b\,\mathrm{sh}\,t$ olan eğrinin mebsutunun kartezyen denklemini bulunuz.

Cevap : $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^{2/3}\alpha^{2/3} - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^{2/3}\beta^{2/3} = 1$

78. Parametrik denklemleri $x = k\log\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2} - k\cos t$, $y = k\sin t$ olan eğrinin mebsutunun kartezyen denklemini bulunuz.

Cevap : $y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$

9. BELİRSİZ ŞEKİLLER

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x(e^x-1)}$ *limitini hesaplayınız.*

$\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olup L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sqrt{\cos 2x}+\dfrac{\cos x\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{e^x-1+x e^x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}\,(x e^x+e^x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos 2x}\,(x e^x+e^x-1)}$$

elde edilir ki bu da $\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan L'hôpitale kuralının tekrar uygulanması ile:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{\dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}(x e^x+e^x-1)+\sqrt{\cos 2x}\,(2e^x+x e^x)} = \frac{3}{2}$$

bulunur.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+4\sin^3 x-3\log(1+x)}{(e^x-1)\sin x}$ *limitini hesaplayınız.*

$\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olup L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+4\sin^3 x-3\log(1+x)}{(e^x-1)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x+12\sin^2 x\cos x-\dfrac{3}{1+x}}{e^x\sin x+(e^x-1)\cos x}$$

elde edilir ki bu da $\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan L'hôpitale

kuralının tekrar uygulanması ile:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-9\sin 3x + 24\sin x\cos^2 x - 12\sin^3 x + \dfrac{3}{(1+x)^2}}{2e^x\cos x + \sin x} = \frac{3}{2}$$

bulunur.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\text{Arctg}\, x}}{1-\cos x}$ *limitini hesaplayınız.*

$\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olup L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\text{Arctg}\, x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \dfrac{e^{\text{Arctg}\, x}}{1+x^2}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1+x^2) - e^{\text{Arctg}\, x}}{(1+x^2)\sin x}$$

elde edilir ki bu da $\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan L'hôpitale kuralının tekrar uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\text{Arctg}\, x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x e^x + (1+x^2)e^x - \dfrac{e^{\text{Arctg}\, x}}{1+x^2}}{2x\sin x + (1+x^2)\cos x} = 0$$

bulunur.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x e^{nx} - x}{1-\cos nx}$ *limitini hesaplayınız.*

$\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olup L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x e^{nx} - x}{1-\cos nx} = \lim_{x\to 0} \frac{nx e^{nx} + e^{nx} - 1}{n\sin nx}$$

elde edilir ki bu da $\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan L'hôpitale kuralının tekrar uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,e^{nx} - x}{1-\cos nx} = \lim_{x\to 0} \frac{2n\,e^{nx} + n^2 x e^{nx}}{n^2 \cos nx} = \frac{2}{n}$$

bulunur

5. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(a \operatorname{Arcsin} x)}{\log(1+x^2)}$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olup L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(a \operatorname{Arcsin} x)}{\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{a \sin(a \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{2x}{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a(1+x^2)\sin(a \operatorname{Arcsin} x)}{2x\sqrt{1-x^2}}$$

elde edilir ki bu da $\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan L'hôpitale kuralının tekrar uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(a \operatorname{Arcsin} x)}{\log(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2ax \sin(a \operatorname{Arcsin} x) + \dfrac{a^2(1+x^2)\cos(a \operatorname{Arcsin} x)}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{1-x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2ax\sqrt{1-x^2}\sin(a \operatorname{Arcsin} x) + a^2(1+x^2)\cos(a \operatorname{Arcsin} x)}{2-4x^2}$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

bulunur.

6. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)}$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olup L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x - 2}{\operatorname{ch} x + \cos x - 2 + x(\operatorname{sh} x - \sin x)}$$

elde edilir ki bu da $\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan, pay ve paydanın her ikisi birden sıfır olmayana kadar, L'hôpitale kuralının uygulanmasına devam edilirse:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{2\operatorname{sh} x - 2\sin x + x(\operatorname{ch} x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{3\operatorname{ch} x - 3\cos x + x(\operatorname{sh} x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{4\operatorname{sh} x + 4\sin x + x(\operatorname{ch} x + \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{5\operatorname{ch} x + 5\cos x + x(\operatorname{sh} x - \sin x)} = \frac{1}{5}$$

bulunur.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{e^x \log(1+x)}$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{0}{0}$ belirsiz şeklindedir; Diğer taraftan:

$$\operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \operatorname{Arctg}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \operatorname{Arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

olarak yerine konur ve L'hôpitale kuralı uygulanırsa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{e^x \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2e^x \log(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\left[e^x \log(1+x) + \dfrac{e^x}{1+x}\right]} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

8. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\log x)-\left|\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right|^{1/2}}{x-1}$$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olup L'hôpitale kuralı uygulanırsa:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\log x)-\left|\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right|^{1/2}}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x}\cos(\log x)-\frac{1}{2}\left|\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right|^{-1/2}\left|\frac{\pi}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\sin\frac{\pi}{2}x}\right|\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x}\cos(\log x)-\frac{\pi}{4}\left|\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{\left\{\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right\}^{1/2}}\right|\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x}\cos(\log x)\right]-\lim_{x\to 1}\frac{\pi}{4}\left|\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{\left[\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{1/2}}\right|$$

$$=1-\lim_{x\to 1}\frac{\pi}{4}\left|\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{\left[\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{1/2}}\right|$$

elde edilir. Bu limit ise 0/0 belirsiz şeklinde olup bunu da L'hôpitale kuralı yardımı ile hesaplarsak:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{\left[\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{1/2}}\right|=\lim_{x\to 1}\left|\frac{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{4}\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{\left[\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{1/2}}}\right|$$

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{\left[\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{1/2}}\right|^2=\lim_{x\to 1}\left|-2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}x\right|=2 \quad \text{ve}$$

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}{\left[\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right]^{1/2}}\right| = \sqrt{2}$$

elde edilir ki yerine konursa:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\log x) - \left|\log\left(\sin\frac{\pi}{2}x\right)\right|^{1/2}}{x-1} = 1 - \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

bulunur.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\log(x-\pi)}{tg\,\dfrac{x}{2}}$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde olup L'hôpitale kuralı uygulanırsa:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\log(x-\pi)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi}\frac{\dfrac{1}{x-\pi}}{\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi}\frac{2\cos^2\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$$

elde edilir ki bu da $\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan L'hôpitale kuralının tekrar uygulanması ile:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\log(x-\pi)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\pi}\frac{-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{1} = 0$$

bulunur.

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\log\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sec x}$ *limitini hesaplayınız.*

$\frac{\infty}{\infty}$ şeklinde olup L'hôpitale kuralı uygulanırsa:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}{\sec x \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x}$$

elde edilir ki bu da $\frac{0}{0}$ belirsiz şeklinde olduğundan L'hôpitale kuralının tekrar uygulanması ile:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin x\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x+\sin x} = 0\,,$$

bulunur.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \log(2+3e^x)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ *limitini hesaplayınız.*

$0\times\infty$ şeklinde olup:

$$\lim_{x\to\infty} \log(2+3e^x).\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(2+3e^x)}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

yazılırsa

$$\lim_{x\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \log e = 1$$

ve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(2+3e^x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3e^x}{2+3e^x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^x}{3e^x} = 1$$

olarak:

$$\lim_{x\to\infty} \log(2+3e^x)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

bulunur.

12. $\lim\limits_{x\to a} (a^2-x^2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}$ *limitini hesaplayınız.*

$0\times\infty$ şeklinde olup:

$$\lim_{x\to a} (a^2-x^2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} = \lim_{x\to a} \frac{a^2-x^2}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ şekline sokulmuş olur. Bu limite de L'hôpitale kuralını uygularsak :

$$\lim_{x\to a}(a^2 - x^2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} = \lim_{x\to a}\frac{-2x}{-\frac{\pi}{2a}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{4ax\sin^2\frac{\pi x}{2a}}{\pi} = \frac{4a^2}{\pi}$$

bulunur.

13. *$\lim_{x\to\infty}(\operatorname{argsh} x - \log x)$ limitini hesaplayınız.*

$\infty - \infty$ belirsiz şeklindedir.

$$\operatorname{argsh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{olup :}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\operatorname{argsh} x - \log x) = \lim_{x\to\infty}[\log(x + \sqrt{x^2+1}) - \log x]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \log 2$$

bulunur.

14. *$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right]$ limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}$$

yazılarak ifade $\frac{0}{0}$ belirsiz şekline sokulmuş olur. Buna da L'hôpitale kuralı uygulanırsa :

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\log x} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1+x\log x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+1+\log x} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$ *limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x}{\sin x}-1\right]^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{x}{\sin x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{x}{\sin x}-1}}$$

$$= e$$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)^{x}$ *limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2} = e^{2}$$

17. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}}$ *limitini hesaplayınız.*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{k} = e^{k}$$

18. $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{m}+x\sin\dfrac{a}{m}\right)^{m}$ *limitini hesaplayınız.*

1^{∞} belirsiz şeklinde bulunduğuna göre :

$$y = \left(\cos\frac{a}{m}+x\sin\frac{a}{m}\right)^{m}$$

den :

$$\log y = m\log\left(\cos\frac{a}{m}+x\sin\frac{a}{m}\right)$$

yazılarak $0\times\infty$ şekline ve :

$$\log y = \frac{\log\left(\cos\frac{a}{m}+x\sin\frac{a}{m}\right)}{\frac{1}{m}}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ şekline dönüştürülmüş olur. Buna da L'hôpitale kuralını uygulayarak :

$$\lim_{m\to\infty} \log y = \lim_{m\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\cos\dfrac{a}{m} + x\sin\dfrac{a}{m}}\left(-\sin\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{-a}{m^2} + x\cos\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{-a}{m^2}\right)}{-\dfrac{1}{m^2}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{a\left(-\sin\dfrac{a}{m} + x\cos\dfrac{a}{m}\right)}{\cos\dfrac{a}{m} + x\sin\dfrac{a}{m}} = ax$$

ve

$$\operatorname{Lim} \log y = ax \quad \text{den de} \quad \operatorname{Lim} y = e^{ax} \quad \text{bulunur.}$$

19. $\lim_{x\to 0} (1 + tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$ *limitini hesaplayınız.*

1^{∞} belirsiz şeklinde olup :

$$y = (1 + \mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$$

den

$$\log y = \frac{1}{2x}\log(1 + \mathrm{tg}^2\sqrt{x}) = \frac{\log(1 + \mathrm{tg}^2\sqrt{x})}{2x}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ şekline varılmış olur. Buna da L'hôpitale kuralı uygulanırsa :

$$\lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \mathrm{tg}^2\sqrt{x})}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\,\mathrm{tg}\sqrt{x}\,(1 + \mathrm{tg}^2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\,(1 + \mathrm{tg}^2\sqrt{x})}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

ve

$$\operatorname{Lim} \log y = \frac{1}{2} \quad \text{den de} \quad \operatorname{Lim} y = e^{1/2} = \sqrt{e} \quad \text{bulunur.}$$

20. $\lim\limits_{x \to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ *limitini hesaplayınız.*

1^{∞} belirsiz şeklinde olup :

$$y = (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} \quad \text{den} \quad \log y = \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\log(2-x) = \frac{\log(2-x)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ belirsiz şekline varılmış olur. Bu ifadeye de L'hôpitale kuralını uygulayarak :

$$\lim_{x \to 1} \log y = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{-1}{2-x}}{-\frac{\pi/2}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x \to 1} \frac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\pi(2-x)} = \frac{2}{\pi}$$

ve $\lim \log y = \frac{2}{\pi}$ den de $\lim y = e^{\frac{2}{\pi}}$ bulunur.

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ *limitini hesaplayınız.*

1^{∞} belirsiz şeklinde olup :

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \quad \text{den} \quad \log y = \operatorname{tg} 2x . \log \operatorname{tg} x = \frac{\log \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} 2x}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ şekline varılmış olur. Buna da L'hôpitale kuralı uygulanırsa :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \log y = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x \operatorname{tg} x}}{\frac{-2}{\sin^2 2x}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} - \frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (-\sin 2x) = -1$$

ve $\lim \log y = -1$ den de $\lim y = e^{-1} = \frac{1}{e}$ elde edilir.

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2}$ *limitini hesaplayınız.*

1^∞ belirsiz şeklinde olup:

$$y = \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2} \text{ den } \log y = x^2 \log \cos \frac{2}{x} = \frac{\log \cos \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ belirsiz şekline sokulmuş olur. Buna da L'hôpitale kuralını uygularsak:

$$\lim_{x \to \infty} \log y = \lim_{x \to \infty} \frac{\log \cos \frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x^2} \cdot \frac{\sin \frac{2}{x}}{\cos \frac{2}{x}}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} -x . \operatorname{tg} \frac{2}{x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} -2 \frac{\operatorname{tg} \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = -2$$

elde edilir ve $\lim \log y = -2$ den de $\lim y = e^{-2}$ bulunur.

24 $\lim\limits_{x \to e} (\log x)^{\log(x-e)}$ *limitini hesaplayınız.*

1^∞ belirsiz şeklinde olup:

$$y = (\log x)^{\log(x-e)} \text{ den } \log y = \log(x-e) \log(\log x)$$

yazılarak $0 \times \infty$ şekline ve:

$$\log y = \frac{\log(x-e)}{\frac{1}{\log(\log x)}}$$

yazılarak da $\frac{\infty}{\infty}$ şekline sokulmuş olur. Bu ifadeye de L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to e}\log y=\lim_{x\to e}\frac{\log(x-e)}{\dfrac{1}{\log(\log x)}}=\lim_{x\to e}\frac{\dfrac{1}{x-e}}{-\dfrac{\dfrac{1}{x\log x}}{\log^2(\log x)}}$$

$$=\lim_{x\to e}-\frac{x.\log x.\log^2(\log x)}{x-e}$$

$$=\lim_{x\to e}-\frac{\log x\log^2(\log x)+\log^2(\log x)+2\log x\log(\log x)}{1}$$

$$=0$$

bulunarak $\lim\log y=e^0=1$ elde edilir.

25. $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\,\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{x}}$ *limitini hesaplayınız.*

1^∞ belirsiz şeklinde olup :

$$\lim_{x\to 0}(1+a\,\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+a\,\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{a\,\mathrm{tg}\,x}}\right]^{\frac{a\,\mathrm{tg}\,x}{x}}=e^a$$

bulunur. Ayni limit :

$$y=(1+a\,\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{den} \quad \log y=\frac{\log(1+a\,\mathrm{tg}\,x)}{x}$$

yazılıp L'hôpitale kuralının uygulanması ile :

$$\lim_{x\to 0}\log y=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a(1+\mathrm{tg}^2x)}{1+a\,\mathrm{tg}\,x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{a(1+\mathrm{tg}^2x)}{1+a\,\mathrm{tg}\,x}=a$$

ve $\lim\log y=a$ dan $\lim y=e^a$ olarak da bulunabilir.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *limitini hesaplayınız.*

1^∞ şeklinde olup :

$y=\left(e^{1/x}+\dfrac{1}{x}\right)^x$ den $\log y=x\log\left(e^{1/x}+\dfrac{1}{x}\right)$ yazılarak $0\times\infty$

şekline ve :

$$\log y = \frac{\log\left(e^{1/x} + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

şeklinde yazılarak ta $\frac{0}{0}$ şekline sokulmuş olur. Bu ifadeye de L'hôpitale kuralı uygulanırsa :

$$\lim_{x\to\infty} \log y = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(e^{1/x} + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}+\frac{1}{x}} = 2$$

ve $\lim \log y = 2$ den de $\lim y = e^2$ bulunur.

27. $\lim_{x\to e} (\log^2 x)^{\frac{1}{1-\log x}}$ *limitini hesaplayınız.*

1^∞ şeklinde olup:

$$y = (\log^2 x)^{\frac{1}{1-\log x}} \quad \text{den} \quad \log y = \frac{\log(\log^2 x)}{1-\log x}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ belirsiz şekline varılmış olur. Bu ifadeye de L'hôpitale kuralı uygulanırsa :

$$\lim_{x\to e} \log y = \lim_{x\to e} \frac{\frac{2\log x \cdot \frac{1}{x}}{\log^2 x}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to e} -\frac{2}{\log x} = -2$$

ve $\lim \log y = -2$ den de $\lim y = e^{-2}$ bulunur.

28. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x - 1)^{\operatorname{sh} x}$ *limitini hesaplayınız.*

0^0 belirsiz şeklinde olup:

$$y = (\operatorname{ch} x - 1)^{\operatorname{sh} x} \quad \text{den} \quad \log y = \operatorname{sh} x \log(\operatorname{ch} x - 1) = \frac{\log(\operatorname{ch} x - 1)}{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$$

yazılarak L'hôpitale kuralının uygulanması ile:

$$\lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1}}{\dfrac{-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch}^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{1 - 2\operatorname{ch} x} = 0$$

ve $\lim \log y = 0$ dan $\lim y = e^0 = 1$ bulunur.

29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (3 + 2e^{\operatorname{tg} x})^{\pi - 2x}$ *limitini hesaplayınız.*

∞^0 belirsiz şeklinde olup:

$$y = (3 + 2e^{\operatorname{tg} x})^{\pi - 2x} \qquad \text{den:}$$

$$\begin{aligned}\log y &= (\pi - 2x)\log(3 + 2e^{\operatorname{tg} x}) = (\pi - 2x)\log e^{\operatorname{tg} x}(3e^{-\operatorname{tg} x} + 2)\\ &= (\pi - 2x)[\log(3e^{-\operatorname{tg} x} + 2) + \log e^{\operatorname{tg} x}]\\ &= (\pi - 2x)\log(3e^{-\operatorname{tg} x} + 2) + (\pi - 2x)\log e^{\operatorname{tg} x}\\ &= (\pi - 2x)\log(3e^{-\operatorname{tg} x} + 2) + (\pi - 2x)\operatorname{tg} x\end{aligned}$$

yazılarak buradan:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [(\pi - 2x)\log(3e^{-\operatorname{tg} x} + 2) + (\pi - 2x)\operatorname{tg} x]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2x)\sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin x + (\pi - 2x)\cos x}{-\sin x} = 2$$

ve $\lim \log y = 2$ den $\lim y = e^2$ bulunur.

Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

30. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x - a}{\sin x - \sin a}$ Cevap: $\sec a$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$ Cevap : 1

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctg} x}{x}$ Cevap : 1

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$ Cevap : $\dfrac{1}{6}$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ Cevap : $\dfrac{1}{2}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{\sin 3x - 3\sin x}$ Cevap : $\dfrac{1}{4}$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3}{\sin^3 x}$ Cevap : 1

37. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3+5x^4}{2x+x^3+3x^4}$ Cevap : $\dfrac{5}{3}$

38. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x-16}}{\sqrt[4]{x}-2}$ Cevap : ∞

39. $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2 - 1000\,x)$ Cevap : ∞

40. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ Cevap : $\dfrac{5}{4}$

41. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$ Cevap : 1

42. $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1}\right]$ Cevap : 2

43. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+x-30}{\sqrt{x-1}-2}$ Cevap : 44

44. $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \dfrac{p}{x}$ Cevap : p

45. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$ Cevap : 0

46. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{x(1-\cos 3x)}$ Cevab : $-\dfrac{4}{9}$

47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-\sin x)^2}{(1-\cos x)^3}$ Cevap : $\dfrac{2}{9}$

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\log(1+x)}{(e^x - 1)}$ Cevap : 0

49. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - \sin^2 x - 2}{x^4(x-1)}$ Cevap : $-\dfrac{5}{12}$

50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arcsin} x}{x(1-\cos x)}$ Cevap : -1

51. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\log(1-x)}$ Cevap : 1

52. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2}$ Cevap : $-\dfrac{1}{4}$

53. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \mathrm{Arctg}\, x}{x^2 \log(1+x)}$ Cevap : $\dfrac{1}{6}$

54. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos 2x - 1}{x-\dfrac{\pi}{6}}$ Cevap : $-2\sqrt{3}$

55. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sin 2x}$ Cevap : 3

56. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{2x}-b^{2x}}{2x}$ Cevap : $\log \dfrac{a}{b}$

57. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)^2}{2\sin x - 1}$ Cevap : 0

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ Cevap : 2

59. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\log \sin \dfrac{x}{2}}{(x-\pi)^2}$ Cevap : $-\dfrac{1}{8}$

60. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \mathrm{Arcsin}\, x}{\sin^3 x}$ Cevap : $-\dfrac{1}{6}$

61. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x - \mathrm{tg}\, x}$ Cevap : $\dfrac{1}{2}$

62. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{cotg}\, 5x}{\mathrm{cotg}\, x}$ Cevap : $\dfrac{1}{5}$

63. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\log x^2}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ Cevap : 0

64. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\log(\log x)}{\log x}$ Cevap : 0

65. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\log x}{x^n}$ Cevap : 0

66. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\,\mathrm{tg}\, x$ Cevap : 2

67. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x \,\mathrm{cosec}\, 5x$ Cevap : $\dfrac{3}{5}$

68. $\lim_{x\to\infty} e^{-ax}\log bx$ Cevap : 0

69. $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-ax}$ Cevap : 0

70. $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{1}{x-\pi}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right]$ Cevap : 0

71. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{\log x}\right)$ Cevap : $-\frac{3}{2}$

72. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$ Cevap : -1

73. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-1)\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ Cevap : 1

74. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ Cevap : $\sqrt[3]{e}$

75. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ Cevap : $\frac{1}{\sqrt{e}}$

76. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ Cevap : 1

77. $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sh} x\log x$ Cevap : 0

78. $\lim_{x\to 0+} (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{tg} x}$ Cevap : 1

79. $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$ Cevap : 1

80. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^x$ Cevap : 1

81. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ Cevap : $\frac{1}{e}$

82. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x$ Cevap : 0

83. $\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ Cevap : 1

84. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\log x}$ Cevap : 1

85. $\lim_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x}$ Cevap : e

86. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cosec} x}$ Cevap : 1

87. $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x}$ Cevap : e

88. $\lim_{x\to 0} x^x$ Cevap : 1

10. BELİRSİZ İNTEGRAL

1. $\int\left(2x^2+3x+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int\left(2x^2+3x+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int 2x^2dx+\int 3xdx+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{4}{x^2}\,dx$$

$$=2\int x^2dx+3\int x\,dx+\int\frac{dx}{x}+4\int x^{-2}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\log x-\frac{4}{x}+C$$

2. $\int(x^2+3)\,x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int(x^2+3)\,x\,dx=\int(x^3+3x)\,dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+C$$

veya $x^2+3=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $2x\,dx=du$, $x\,dx=\frac{1}{2}du$ olarak :

$$\int(x^2+3)\,x\,dx=\frac{1}{2}\int u\,du=\frac{1}{4}u^2+C=\frac{1}{4}(x^2+3)^2+C$$

bulunur.

3. $\int(ax^2+2bx)^4(ax+b)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$ax^2+2bx=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $(2ax+2b)\,dx=du$ ve $(ax+b)\,dx=\frac{1}{2}du$ olarak :

$$\int(ax^2+2bx)^4(ax+b)\,dx=\frac{1}{2}\int u^4\,du=\frac{1}{10}u^5+C$$

$$=\frac{1}{10}(ax^2+2bx)^5+C$$

bulunur.

4. $\int \frac{4(ax+b)\,dx}{ax^2+2bx}$ *integralini hesaplayınız.*

$ax^2+2bx=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $(2ax+2b)\,dx=du$ ve $(ax+b)\,dx=\frac{1}{2}\,du$ olarak :

$$\int \frac{4(ax+b)\,dx}{ax^2+2bx} = 2\int \frac{du}{u} = 2\log u + C$$

$$= 2\log(ax^2+2bx)+C$$

$$= \log(ax^2+2bx)^2+C$$

bulunur.

5. $\int (e^{ax}+b)^2 e^{ax}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$e^{ax}+b=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $a\,e^{ax}dx=du$ ve $e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\,du$ olarak :

$$\int (e^{ax}+b)^2 e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int u^2\,du = \frac{1}{3a}u^3+C = \frac{1}{3a}(e^{ax}+b)^3+C$$

bulunur

6. $\int \frac{\sec^2(ax+b)\,dx}{tg(ax+b)+C}$ *integralini hesaplayınız.*

$tg(ax+b)+C=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $\sec^2(ax+b)\,a\,dx=du$ ve $\sec^2(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\,du$ olarak :

$$\int \frac{\sec^2(ax+b)\,dx}{tg(ax+b)+C} = \frac{1}{a}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{a}\log u + K$$

$$= \frac{1}{a}\log[tg(ax+b)+C]+K$$

bulunur.

7. $\int \cos(2x^2+3x)\,(4x+3)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$2x^2+3x=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $(4x+3)dx=du$ olarak :

$$\int \cos(2x^2+3x)\,(4x+3)dx = \int \cos u\, du = \sin u + C$$
$$= \sin(2x^2+3x) + C$$

bulunur.

8. $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\, dx = \int \sqrt{\sin x}\,(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$$

olup $\sin x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $\cos x\, dx = du$ elde edilerek :

$$\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\, dx = \int u^{1/2}(1-u^2)du = \int (u^{1/2}-u^{5/2})\, du$$
$$= \frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{7}u^{7/2} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sin^{3/2}x - \frac{2}{7}\sin^{7/2}x + C$$
$$= \frac{2}{21}\sin^{3/2}x(7-3\sin^2 x) + C$$

bulunur.

9. $\int \sec^6 2x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \sec^6 2x\, dx = \int \sec^4 2x\,(\sec^2 2x\, dx) = \int (1+\mathrm{tg}^2 2x)^2 \sec^2 2x\, dx$$
$$= \int (1+2\,\mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{tg}^4 2x)\sec^2 2x\, dx$$

olup $\mathrm{tg}\, 2x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $2\sec^2 2x\, dx = du$ ve $\sec^2 2x\, dx = \frac{1}{2}du$ olarak :

$$\int \sec^6 2x\, dx = \int \frac{1}{2}(1+2u^2+u^4)du$$
$$= \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + C$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{tg}\, 2x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 2x + \frac{1}{10}\mathrm{tg}^5 2x + C$$

bulunur.

10. $\int \cos^2 x \, dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{olup:}$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

dir.

11. $\int \sqrt{1+\cos x}\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} \quad \text{olup:}$$

$$\int \sqrt{1 + \cos x}\, dx = \int \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\, dx = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + C$$

dir.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$ *integralini hesaplayınız.*

$2x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $2\,dx = du$ ve $dx = \frac{1}{2}du$ olarak:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{9 - u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{3} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C$$

bulunur.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (x-2)^2} \quad \text{olup:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} = \text{Arcsin}\,\frac{x-2}{2} + C$$

dir.

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \int \frac{2\,dx}{4x^2+12x+10} = \int \frac{2\,dx}{(2x+3)^2+1}$$

olup $2x+3=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $2\,dx=du$ olarak:

$$\int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \int \frac{du}{u^2+1} = \text{arctg}\, u + C = \text{arctg}(2x+3) + C$$

bulunur.

15. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2-4x+8}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2-4x+8} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+8} + 3\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2-4x+8) + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2-4x+8) + \frac{3}{2}\,\text{arctg}\,\frac{x-2}{2} + C$$

16. $\displaystyle\int \frac{(2-x)\,dx}{4x^2+4x-3}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{(2-x)\,dx}{4x^2+4x-3} = -\frac{1}{8}\int \frac{(8x+4)\,dx}{4x^2+4x-3} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{4x^2+4x-3}$$

$$= -\frac{1}{8}\log(4x^2+4x-3) + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(2x-1)(2x+3)}$$

$$= -\frac{1}{8}\log(4x^2+4x-3) + \frac{5}{16}\log\frac{2x-1}{2x+3} + C$$

17. $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{9x^2-12x+8}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{9x^2-12x+8} = \frac{1}{9}\int \frac{(18x-12)\,dx}{9x^2-12x+8} + \frac{13}{3}\int \frac{dx}{(3x-2)^2+4}$$

$$= \frac{1}{9}\log(9x^2-12x+8) + \frac{13}{18}\,\text{arctg}\,\frac{3x-2}{2} + C$$

18. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{-(-2x+2)+3}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$$

$$= -\int \frac{(-2x+2)dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$$= -2\sqrt{-x^2+2x+3} + 3\arcsin\frac{x-1}{2} + C$$

19. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\int \frac{(-2-x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$= -\sqrt{5-4x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

$$= -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\frac{x+2}{3} + C$$

20. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ *integralini hesaplayınız.*

$\operatorname{tg} x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$ olarak:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,du = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,du = \int (1+u^2)\,du$$

$$= u + \frac{1}{3}u^3 + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$$

bulunur.

21. $\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\sin x}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{\cos^5 x\,dx}{\sin x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx}{\sin x}$$

yazılıp $\sin x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $\cos x\,dx = du$ olarak :

$$\int \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{(1-u^2)^2}{u} du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) du = \log u - u^2 + \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \log \sin x + \frac{1}{4} \sin^4 x - \sin^2 x + C$$

bulunur.

22. $\int \sin^5 3x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \sin^5 3x\, dx = \int \sin^4 3x \sin 3x\, dx = \int (1 - \cos^2 3x)^2 \sin 3x\, dx$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 3x + \cos^4 3x) \sin 3x\, dx$$

yazılıp $\cos 3x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $-3 \sin 3x\, dx = du$ olarak:

$$\int \sin^5 3x\, dx = -\frac{1}{3} \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\left(u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{2}{9} \cos^3 3x - \frac{1}{15} \cos^5 3x + C$$

bulunur.

23. $\int tg^7 x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int tg^7 x\, dx = \int tg^5 x (tg^2 x + 1 - 1) dx = \int tg^5 x (tg^2 x + 1) dx - \int tg^5 x\, dx$$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \int tg^3 x (tg^2 x + 1 - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \int tg^3 x\, (tg^2 x + 1)\, dx + \int tg^3 x\, dx$$

$$= \frac{1}{6} tg^6 x - \frac{1}{4} tg^4 x + \int tg\, x\, (tg^2 x + 1 - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\,\mathrm{tg}^6x - \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4x + \int \mathrm{tg}x(\mathrm{tg}^2x+1)dx - \int \mathrm{tg}\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\,\mathrm{tg}^6\,x - \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^4\,x + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2x + \log\cos x + C$$

24. $\int \cos^5 x\,dx$ *integralini hesaplayınız*

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\cos x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x\,dx$$

yazılıp $\sin x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $\cos x\,dx = du$ olarak :

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1 - 2u^2 + u^4)\,du = u - \frac{2}{3}\,u^3 + \frac{1}{5}\,u^5 + C$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\,\sin^3 x + \frac{1}{5}\,\sin^5 x + C$$

bulunur.

25. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx = \int -\frac{1}{2}\,\sin 2x(\cos 4x - \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 2x\,\cos 2x - \sin 2x\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\,(\sin 6x - \sin 2x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(\sin 4x - \sin 6x - \sin 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{6}\cos 6x\right] + C$$

$$= \frac{1}{24}\,\cos 6x - \frac{1}{16}\,\cos 4x - \frac{1}{8}\,\cos 2x + C$$

26. $\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x} = \int \frac{\sin 2x \, dx}{1 - \cos 2x}$$

olup $1-\cos 2x=u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $2\sin 2x dx=du$ ve $\sin 2x\, dx = \frac{1}{2} du$ olarak:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \log u + C$$

$$= \frac{1}{2} \log(1 - \cos 2x) + C$$

bulunur

27. $\int \sec^5 x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \sec^5 x\, dx = \int \sec^3 x \sec^2 x\, dx$$

yazılıp kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $\sec^3 x = u$, $\sec^2 x\, dx = dv$ kabul edilirse $3\sec^3 x \operatorname{tg} x\, dx = du$ ve $\operatorname{tg} x = v$ olarak:

$$\int \sec^5 x\, dx = \sec^3 x \operatorname{tg} x - 3\int \sec^3 x \operatorname{tg}^2 x\, dx$$

$$= \sec^3 x \operatorname{tg} x - 3\int \sec^3 x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \sec^3 x \operatorname{tg} x - 3\int \sec^5 x\, dx + 3\int \sec^3 x\, dx$$

$$4\int \sec^5 x dx = \sec^3 x \operatorname{tg} x + 3\int \sec^3 x\, dx$$

elde edilir. Şimdi de $\int \sec^3 x\, dx$ i hesaplamak üzere kısmi integrasyon kuralını uygulayalım:

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \sec x \sec^2 x\, dx$$

yazılıp $\sec x = u$, $\sec^2 x\, dx = dv$ kabul edilirse $\sec x \operatorname{tg} x\, dx = du$ ve $\operatorname{tg} x = v$ olarak:

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx$$
$$= \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx$$
$$= \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$
$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x + \log(\sec x + \mathrm{tg}\,x)$$
$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{2}\log(\sec x + \mathrm{tg}\,x)$$

bulunur. Bu sonucu $\int \sec^5 x\,dx$ ifadesinde yerine koyarsak:

$$4\int \sec^5 x\,dx =$$
$$= \sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{2}\sec x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{2}\log(\sec x + \mathrm{tg}\,x)$$

ve :

$$\int \sec^5 x\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\sec^3 x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{8}\sec x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{3}{8}\log(\sec x + \mathrm{tg}\,x) + C$$

elde edilir.

28. $\displaystyle\int \frac{x\,e^{a\,\mathrm{arctg}\,x}\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ *integralini hesaplayınız.*

Kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = u$, $\dfrac{e^{a\,\mathrm{arctg}\,x}\,dx}{1+x^2} = dv$ kabul edilirse $\dfrac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = du$ ve $\dfrac{1}{a}e^{a\,\mathrm{arctg}x} = v$ olarak :

$$\int \frac{x\,e^{a\,\mathrm{arctg}\,x}\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\,e^{a\,\mathrm{arctg}x}}{a\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{a\,\mathrm{arctg}\,x}\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

elde edilir. Şimdi de ikinci taraftaki integrali hesaplamak için kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = u\,, \qquad \frac{e^{a\,\mathrm{arctg}\,x}\,dx}{1+x^2} = dv$$

kabul edersek :

$$\frac{-x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}} = du \quad \text{ve} \quad \frac{1}{a}e^{a\,\mathrm{arctg}\,x} = v$$

olarak :

$$\int \frac{x\, e^{a \operatorname{arctg} x}\, dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x\, e^{a \operatorname{arctg} x}}{a\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{a}\left[\frac{e^{a \operatorname{arctg} x}}{a\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{a}\int \frac{x\, e^{a \operatorname{arctg} x}\, dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right]$$

$$= \frac{x\, e^{a \operatorname{arctg} x}}{a\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{a \operatorname{arctg} x}}{a^2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x\, e^{a \operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\, dx$$

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\int \frac{x\, e^{a \operatorname{arctg} x}\, dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{(ax-1)\, e^{a \operatorname{arctg} x}}{a^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{x\, e^{a \operatorname{arctg} x}\, dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{(ax-1)e^{a \operatorname{arctg} x}}{(a^2+1)\sqrt{1+x^2}} + C$$

bulunur.

29. $\displaystyle\int \frac{\sin 3x\, e^x\, dx}{\sin x}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{\sin 3x\, e^x\, dx}{\sin x} = \int (3 - 4\sin^2 x)e^x dx = \int (1 + 2\cos 2x)e^x\, dx$$

$$= \int e^x\, dx + \int 2\cos 2x\; e^x\, dx$$

$$= e^x + \int 2\, e^x \cos 2x\, dx$$

yazılıp ikinci taraftaki integrale kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $e^x = u$, $2\cos 2x\, dx = dv$ kabul edersek $e^x dx = du$ ve $\sin 2x = v$ olarak :

$$\int 2\, e^x \cos 2x\, dx = e^x \sin 2x - \int e^x \sin 2x\, dx$$

elde edilir ve ikinci taraftaki integrale kısmi integrasyon kuralı tekrar uygulanırsa :

$$\int 2\, e^x \cos 2x\, dx = e^x \sin 2x + \frac{1}{2}\, e^x \cos 2x - \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x\, dx$$

$$\frac{5}{2}\int e^x \cos 2x\, dx = e^x \sin 2x + \frac{1}{2}\, e^x \cos 2x$$

$$2\int e^x \cos 2x\, dx = \frac{4}{5}\, e^x \sin 2x + \frac{2}{5}\, e^x \cos 2x$$

olarak :

$$\int \frac{\sin 3x\, e^x\, dx}{\sin x} = e^x + \frac{1}{5}\, e^x(4\sin 2x + 2\cos 2x) + C$$

bulunur.

30. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{e^{3x}}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{e^{3x}} = \int e^{-3x} \cos 2x\, dx$$

olup bu integrale kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $e^{-3x} = u$, $\cos 2x\, dx = dv$ kabul edilirse $-3\, e^{-3x} dx = du$ ve $\frac{1}{2} \sin 2x = v$ olarak :

$$\int e^{-3x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} e^{-3x} \sin 2x + \frac{3}{2} \int e^{-3x} \sin 2x\, dx$$

elde edilir. Şimdi de ikinci integrale ayni kuralı uygulamak üzere $e^{-3x} = u$, $\sin 2x\, dx = dv$ kabul edersek $-3\, e^{-3x}\, dx = du$ ve $-\frac{1}{2} \cos 2x = v$ olarak :

$$\int e^{-3x} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2} e^{-3x} \cos 2x - \frac{3}{2} \int e^{-3x} \cos 2x\, dx$$

elde edilir ki bunu da yukarıdaki ifadede yerine koyarsak :

$$\int e^{-3x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} e^{-3x} \sin 2x - \frac{3}{4} e^{-3x} \cos 2x - \frac{9}{4} \int e^{-3x} \cos 2x\, dx$$

$$\frac{13}{4} \int e^{-3x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} e^{-3x} \sin 2x - \frac{3}{4} e^{-3x} \cos 2x$$

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{e^{3x}} = \frac{1}{13\, e^{3x}} (2 \sin 2x - 3 \cos 2x) + C$$

bulunur.

31. $\int x \arcsin x^2 dx$ *integralini hesaplayınız.*

Kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $x\, dx = dv$, $\arcsin x^2 = u$ kabul edilirse $\frac{x^2}{2} = v$ ve $\frac{2x\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = du$ olarak :

$$\int x \operatorname{arc} \sin x^2\, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x^2 - \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{x^2}{2} \arcsin x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C$$

bulunur.

32. $\int x^3 (\log x)^2\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $(\log x)^2 = u$, $x^3\, dx = dv$ kabul edilirse $\frac{2}{x} \log x\, dx = du$ ve $\frac{x^4}{4} = v$ olarak:

$$\int x^3 (\log x)^2\, dx = \frac{1}{4} x^4 (\log x)^2 - \frac{1}{2} \int x^3 \log x\, dx$$

elde edilir. Şimdi de ikinci taraftaki integrale ayni kuralı uygulamak üzere $\log x = u$, $x^3\, dx = dv$ kabul edilirse $\frac{dx}{x} = du$ ve $\frac{x^4}{4} = v$ olarak:

$$\int x^3 \log x\, dx = \frac{1}{4} x^4 \log x - \frac{1}{4} \int x^3\, dx = \frac{1}{4} x^4 \log x - \frac{1}{16} x^4$$

bulunur ki bunu da yukarıdaki ifadede yerine koyarsak:

$$\int x^3 (\log x)^2\, dx = \frac{1}{4} x^4 (\log x)^2 - \frac{1}{8} x^4 \log x + \frac{1}{32} x^4 + C$$

$$= \frac{x^4}{32} [8 (\log x)^2 - 4 \log x + 1] + C$$

sonucuna varılır.

33. $\int (x^2 - 1) \arcsin 2x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $\arcsin 2x = u$, $(x^2 - 1)\, dx = dv$ kabul edilirse $\frac{2\, dx}{\sqrt{1-4x^2}} = du$ ve $\frac{x^3}{3} - x = v$ olarak:

$$\int (x^2 - 1) \arcsin 2x\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \arcsin 2x - \frac{2}{3} \int \frac{(x^3 - 3x)\, dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

elde edilir. Şimdi ikinci taraftaki integrali hesaplamak için de $2x = \sin\varphi$ değişken dönüştürmesini yapalım. Bu halde $2dx = \cos\varphi\, d\varphi$ olarak:

$$\int \frac{(x^3-3x)\,dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{\frac{1}{8}\sin^3\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\frac{1}{2}\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \int \left(\frac{1}{16}\sin^2\varphi - \frac{3}{4}\right)\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \int \frac{1}{16}\,(11+\cos^2\varphi)\,(-\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{16}\left(11\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{48}\cos\varphi\,(33+\cos^2\varphi)$$

$$= \frac{1}{48}\sqrt{1-4x^2}\,(34-4x^2)$$

bulunur. Elde edilen bu sonucu yukarıdaki ifadede yerine koyarsak:

$$\int (x^2-1)\arcsin 2x\,dx = \frac{x}{3}(x^2-3)\arcsin 2x - \frac{1}{36}(17-2x^2)\sqrt{1-4x^2} + C$$

sonucuna varılır.

34. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos 3x}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\cos 3x} = \int \frac{2\sin x\cos x}{4\cos^3 x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{2\sin x\,dx}{4\cos^2 x - 3}$$

olup $\cos x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $-\sin x\,dx = du$ olarak: $\int \frac{-2\,du}{4u^2-3}$ integraline varılmış olur. Bunu hesaplamak üzere:

$$\frac{-2}{4u^2-3} = \frac{A}{2u+\sqrt{3}} + \frac{B}{2u-\sqrt{3}}$$

yazılırsa $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ olup:

$$\int \frac{-2\,du}{4u^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \left(\frac{1}{2u+\sqrt{3}} - \frac{1}{2u-\sqrt{3}} \right) du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{2u+\sqrt{3}}{2u-\sqrt{3}} + C$$

bulunur ve u yerine $\cos x$ yazılırsa:

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\cos 3x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{2\cos x+\sqrt{3}}{2\cos x-\sqrt{3}} + C$$

sonucuna varılır.

35. $\int x\,e^x \cos x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Kısmi integrasyon kuralını uygulamak üzere $x\,e^x = u$, $\cos x\,dx = dv$ kabul edilirse $(e^x + x\,e^x)\,dx = du$ ve $\sin x = v$ olarak:

$$\int x\,e^x \cos x\,dx = x\,e^x \sin x - \int (e^x + x\,e^x) \sin x\,dx$$

$$= x\,e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx - \int x\,e^x \sin x\,dx$$

$$= x\,e^x \sin x - \left[e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \right]$$

$$+ x\,e^x \cos x - \int (e^x + x\,e^x) \cos x\,dx$$

$$= x\,e^x \sin x - e^x \sin x + \int e^x \cos x\,dx + x\,e^x \cos x$$

$$- \int e^x \cos x\,dx - \int x e^x \cos x\,dx$$

$$2 \int x\,e^x \cos x\,dx = x\,e^x \sin x + x\,e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$= (x-1)\,e^x \sin x + x\,e^x \cos x$$

$$\int x\,e^x \cos x\,dx = \frac{x-1}{2}\,e^x \sin x + \frac{x}{2}\,e^x \cos x + C$$

bulunur.

36. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$x = a\sin\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx = a\cos\varphi\, d\varphi$ ve $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\varphi$ olarak:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + C$$

elde edilir. Halbuki $\varphi = \arcsin\frac{x}{a}$ ve $\sin 2\varphi = 2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$ olup:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$$

bulunur.

37. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ *integralini hesaplayınız.*

$x = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx = a\sec^2\varphi\, d\varphi$ ve $\sqrt{x^2+a^2} = a\sec\varphi$ olarak:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int\frac{d\varphi}{\sec\varphi} = \frac{1}{a^2}\int\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{a^2}\sin\varphi + C$$

bulunur ve $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{x}{a}$ olduğundan $\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ olarak:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

sonucuna varılır.

38. $\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$x = a \sec\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırşa $dx = a \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi$ ve $\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg}\varphi$ olarak :

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = a^5 \int \operatorname{tg}^2\varphi \sec^4\varphi \, d\varphi$$

$$= a^5 \int (\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi) \sec^2\varphi \, d\varphi$$

$$= a^5 \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3\varphi + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5\varphi \right) + C$$

elde edilip $\sec\varphi = \dfrac{x}{a}$ ve $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$ olduğu göz önüne alınırsa :

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{15} \sqrt{(x^2 - a^2)^3}\, (2a^2 + 3x^2) + C$$

bulunur.

39. $\displaystyle\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx$ *integralini hesaplayınız.*

$x = a \sec\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx = a \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi$ ve $x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2\varphi$ olarak :

$$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx = \int \frac{a^3 \operatorname{tg}^3\varphi}{a \sec\varphi} a \sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi$$

$$= a^3 \int \operatorname{tg}^4\varphi \, d\varphi$$

$$= a^3 \int \operatorname{tg}^2\varphi (\sec^2\varphi - 1) \, d\varphi$$

$$= a^3 \int (\operatorname{tg}^2\varphi \sec^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi) \, d\varphi$$

$$= a^3 \int (\operatorname{tg}^2\varphi \sec^2\varphi - \sec^2\varphi + 1) \, d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{3} \operatorname{tg}^3\varphi - a^3 \operatorname{tg}\varphi + a^3\varphi + C$$

bulunur. Halbuki $\sec\varphi = \dfrac{x}{a}$, $\varphi = \arccos \dfrac{a}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin \dfrac{a}{x}$ ve

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} \quad \text{olup:}$$

$$\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x} dx = \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{3/2} - a^2\sqrt{x^2-a^2} - a^3 \arcsin \frac{a}{x} + K$$

elde edilir.

40. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1} dx$ *integralini hesaplayınız.*

$\sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{(x+1)^2-4}$ olup $x+1 = 2\sec\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa.

$$dx = 2\sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi \quad \text{ve} \quad \sqrt{(x+1)^2-4} = 2\operatorname{tg}\varphi \quad \text{olarak}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1} dx &= \int \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{2\sec\varphi} 2\sec\varphi \operatorname{tg}\varphi \, d\varphi \\
&= 2\int \operatorname{tg}^2\varphi \, d\varphi \\
&= 2\int (\operatorname{tg}^2\varphi + 1 - 1)\, d\varphi \\
&= 2\operatorname{tg}\varphi - 2\varphi + C
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\sec\varphi = \dfrac{x+1}{2}$, $\varphi = \operatorname{arcsec}\dfrac{x+1}{2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\sec^2\varphi - 1} = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{2} \quad \text{olup:}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1} dx = \sqrt{x^2+2x-3} - 2\operatorname{arcsec}\frac{x+1}{2} + C$$

dir.

41. $\displaystyle\int \frac{(x+7)\,dx}{(x^2+2x+10)^2}$ *integralini hesaplayınız.*

$x^2+2x+10 = (x+1)^2+9$ olup $x+1 = 3\operatorname{tg}\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx = \sec^2\varphi \, d\varphi$ olarak:

$$\int \frac{(x+7)\,dx}{(x^2+2x+10)^2} = \int \frac{3\,\mathrm{tg}\varphi + 6}{(9\,\mathrm{tg}^2\varphi + 9)^2}\, 3\sec^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{9}{81}\int \frac{\mathrm{tg}\,\varphi + 2}{(\mathrm{tg}^2\,\varphi + 1)^2}\sec^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{tg}\varphi + 2}{\sec^4\varphi}\sec^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{tg}\varphi + 2}{\sec^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{9}\int \cos^2\varphi\,(\mathrm{tg}\varphi + 2)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{9}\int (\sin\varphi\cos\varphi + 2\cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{9}\int (\sin\varphi\cos\varphi + 1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi + \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + C$$

bulunur. Diğer taraftan $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{x+1}{3}$ olup $\varphi = \mathrm{Arctg}\,\dfrac{x+1}{3}$,

$\sin^2\varphi = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+10}$ ve $\sin 2\varphi = \dfrac{6(x+1)}{x^2+2x+10}$ olarak :

$$\int \frac{(x+7)\,dx}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{x^2+8x+7}{18(x^2+2x+10)} + \frac{1}{9}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{3} + C$$

elde edilir.

41. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+1}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x^3\,dx}{x^4+1} + \int \frac{x\,dx}{x^4+1} + \int \frac{dx}{x^4+1}$$

$$= \frac{1}{4}\log(x^4+1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2 + \int \frac{dx}{x^4+1}$$

olup şimdi de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$ integralini hesaplamak üzere :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

yazalım. Buradan $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $D = \frac{1}{2}$ bulunarak

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{(x+\sqrt{2})\,dx}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{(x-\sqrt{2})\,dx}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}\,x+1) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1)$$

$$+ \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)]$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$$

elde edilir. Bu da yukarıda elde edilen ifadede yerine konulursa:

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\log(x^4+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} + C$$

sonucuna varılır.

43. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)\,x\,(x+1)$$
$$1 = (A+B+C)\,x^3 + (A+C+D)\,x^2 + (A+B+D)\,x + A$$

olup:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0\\ A+C+D&=0\\ A+B+D&=0\\ A&=1 \end{aligned}\right\} \text{ den } \quad \begin{aligned} A&=1\\ B&=-\frac{1}{2}\\ C&=-\frac{1}{2}\\ D&=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunarak:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x^2+1}\right] dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

elde edilir.

44. $\int \frac{x^4\,dx}{x^3-8}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\frac{x^4}{x^3-8} = x + \frac{8x}{x^3-8}$$

olup:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^3-8} = \int x\, dx + \int \frac{8x}{x^3-8} dx = \frac{1}{2} x^2 + \int \frac{8x}{x^3-8} dx$$

bulunur. Şimdi de ikinci taraftaki integrali hesaplamak üzere:

$$\frac{8x}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

yazarsak, buradan:

$$8x = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

ve

$$A = \frac{4}{3}\ , \quad B = -\frac{4}{3}\ , \quad C = \frac{8}{3}$$

bulunarak:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^3-8} = \frac{1}{2} x^2 + \int \left[\frac{4}{3(x-2)} - \frac{4x-8}{3(x^2+2x+4)}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3}\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+4} + 4\int \frac{dx}{x^2+2x+4}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{3}\log(x-2) - \frac{2}{3}\log(x^2+2x+4) + 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{4}{3}\log(x-2) - \frac{2}{3}\log(x^2+2x+4) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3}\log\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x+4} + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

elde edilir.

45. $\int \frac{(x^3+2)\,dx}{x^3+x^2+x+1}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{(x^3+2)\,dx}{x^3+x^2+x+1} = \int\left[1-\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2+x+1}\right]dx$$

$$= x - \int \frac{x^2+x-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

ve

$$\frac{x^2+x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x^2+x-1 = (A+B)\,x^2 + (B+C)\,x + A + C$$

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 1 \\ B+C &= 1 \\ A+C &= -1 \end{aligned}\right\} \text{ den } \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{1}{2}$$

olup:

$$\int \frac{(x^3+2)\,dx}{x^3+x^2+x+1} = x - \int\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{3x-1}{x^2+1}\right]dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{3x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= x + \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{3}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

bulunur.

46. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$x^3+x^2+x+2 = (A+C)\,x^3 + (B+D)\,x^2 + (2A+C)\,x + 2B + D$$

ve

$$A = 0 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 1 \quad , \quad D = 0$$

olarak:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{x\,dx}{x^2+2}$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\log(x^2+2) + C$$

bulunur.

47. $\displaystyle\int \frac{x^5 + 2x^4 - 8x^2 - 4}{x^4 - x^3 - x + 1}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{x^5+2x^4-8x^2-4}{x^4-x^3-x+1}\,dx = \int \left[x+3+\frac{3x^3-7x^2+2x-7}{x^4-x^3-x+1}\right]dx$$

$$= \int \left[x+3+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\right]dx$$

$$= \int \left[x+3+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{x^2+x+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2+3x+2\log(x-1)+\frac{3}{x-1}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{5}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2+3x+2\log(x-1)+\frac{3}{x-1}$$

$$+\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)-\frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

48. $\displaystyle\int \frac{18x^3 - 44x^2 + 8x - 21}{(x-1)(9x^2+4)}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{18x^3-44x^2+8x-21}{(x-1)(9x^2+4)}\,dx = \int \left[2-\frac{26x^2+13}{(x-1)(9x^2+4)}\right]dx$$

$$= \int \left[2-\frac{A}{x-1}-\frac{Bx+C}{9x^2+4}\right]dx$$

$$= \int \left[2-\frac{3}{x-1}+\frac{x+1}{9x^2+4}\right]dx$$

$$= 2x-3\log(x-1)+\frac{1}{18}\int \frac{18x}{9x^2+4}\,dx+\int \frac{dx}{9x^2+4}$$

$$= 2x-3\log(x-1)+\frac{1}{18}\log(9x^2+4)+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x\,(1-\sin^2 x)}$$

olup $\sin x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $\cos x\, dx = du$ olarak:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{du}{u^3(1-u^2)}$$

$$= \int \left[\frac{A}{u^3} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u} + \frac{D}{1+u} + \frac{E}{1-u}\right] du$$

$$= \int \left[\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-u}\right] du$$

$$= -\frac{1}{2u^2} + \log u - \frac{1}{2}\log(1+u) - \frac{1}{2}\log(1-u) + C$$

$$= -\frac{1}{2u^2} + \log\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} + C$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \log\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} + C$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} + \log \operatorname{tg} x + C$$

bulunur.

50. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin x + \sin 3x}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin x + \sin 3x} = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{2\sin 2x \cos x}\, dx$$

$$= \int \frac{2\cos^2 x - 1}{4\sin x \cos^2 x}\, dx$$

olup $\cos x = u$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $-\sin x\, dx = du$ ve:

$$\frac{dx}{\sin x} = -\frac{du}{\sin^2 x} = -\frac{du}{1-u^2}$$

olarak:

$$\int \frac{2\cos^2 x - 1}{4\sin x \cos^2 x}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-2u^2}{u^2(1-u^2)}\, du$$

ve

$$\frac{1-2u^2}{u^2(1-u^2)} = \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{1+u}$$

dan A, B, C, D belirtilirse:

$$\frac{1}{4}\int \frac{1-2u^2}{u^2(1-u^2)}\, du = \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-u} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u}\right] du$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\log(1-u) - \frac{1}{2}\log(1+u)\right] + C$$

$$= \frac{1}{8}\log\frac{1-u}{1+u} - \frac{1}{4u} + C$$

bulunur. Bu ifadede u yerine $\cos x$ yazılırsa:

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin x + \sin 3x} = \frac{1}{8}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \frac{1}{4\cos x} + C$$

$$= \frac{1}{4}\log \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sec x + C$$

elde edilir.

51. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$ *integralini hesaplayınız.*

$$5 - 4x - x^2 = (5+x)(1-x)$$

olup $(5-4x-x^2)^{1/2} = (1-x)\,t$ değişken dönüştürmesi yapılırsa:

$$x = \frac{t^2-5}{t^2+1}, \quad dx = \frac{12t\, dt}{(t^2+1)^2} \quad \text{ve} \quad \sqrt{5-4x-x^2} = \frac{6t}{1+t^2}$$

olarak:

$$\int \frac{x\, dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\dfrac{t^2-5}{t^2+1}\cdot\dfrac{12t\, dt}{(t^2+1)^2}}{\dfrac{6^3t^3}{(t^2+1)^3}}$$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{t^2-5}{t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{18}\int\left(1-\frac{5}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{18}\left(t+\frac{5}{t}\right)+C$$

$$= \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}}+C$$

bulunur.

52. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$ *integralini hesaplayınız.*

$u-x=\sqrt{x^2+x+2}$ değişken dönüştürmesi yapılırsa:

$$x=\frac{u^2-2}{2u+1}\ ,\quad dx=\frac{2u^2+2u+4}{(2u+1)^2}du\ ,\quad \sqrt{x^2+x+2}=\frac{u^2+u+2}{2u+1}$$

olarak :

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}=\int\frac{2\,du}{u^2-2}$$

$$= 2\int\left[\frac{A}{u-\sqrt{2}}+\frac{B}{u+\sqrt{2}}\right]du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\left[\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right]du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}+C$$

bulunur.

53. $\int \frac{x^2\,dx}{(1+2x)^{1/3}}$ *integralini hesaplayınız.*

$1+2x=u^3$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $x=\frac{1}{2}(u^3-1)$

ve $dx=\frac{3}{2}u^2\,du$ olarak :

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+2x)^{1/3}} = \frac{3}{8}\int \frac{(u^3-1)^2 u^2}{u}\,du$$

$$= \frac{3}{8}\int (u^7 - 2\,u^4 + u)\,du$$

$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\,u^8 - \frac{2}{5}\,u^5 + \frac{1}{2}\,u^2\right. + C$$

$$= \frac{3u^2}{320}(5\,u^6 - 16\,u^3 + 20) + C$$

$$= \frac{3}{320}(1+2x)^{2/3}(20x^2 - 12x + 9) + C$$

bulunur.

54. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$x^2 + a^2 = u^2$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $x\,dx = u\,du$ olarak:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,x\,dx$$

$$= \int \frac{u^2}{u^2-a^2}\,du$$

$$= \int \left(1 + \frac{a^2}{u^2-a^2}\right)du$$

$$= u + \frac{a}{2}\log\frac{u-a}{u+a} + C$$

$$= \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+a^2}+a} + C$$

bulunur.

55. $\int x^5(1+2x^3)^{1/2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$1+2x^3 = u^2$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,u\,du$

olarak :

$$\int x^5(1+2x^3)^{1/2}\,dx = \int x^3(1+2x^3)^{1/2}\,x^2\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(u^2-1)\,u\,\frac{1}{3}\,u\,du$$

$$= \frac{1}{6}\int (u^4-u^2)du$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right)+C$$

$$= \frac{1}{90}u^3(3u^2-5)+C$$

$$= \frac{1}{45}(1+2x^3)^{3/2}(3x^3-1)+C$$

bulunur.

56. $\int \frac{(x+2)^{1/2}-(x+2)^{1/4}}{(x+2)^{1/4}+1}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$x+2=u^4$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $x=u^4-2$, $dx=4u^3\,du$ olarak :

$$\int \frac{(x+2)^{1/2}-(x+2)^{1/4}}{(x+2)^{1/4}+1}\,dx = \int \frac{u^2-u}{u+1}\,4u^3\,du$$

$$= 4\int \frac{u^5-u^3}{u+1}\,du$$

$$= 4\int \left(u^4-2u^3+2u^2-2u+2-\frac{2}{u+1}\right)du$$

$$= 4\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{2}u^4+\frac{2}{3}u^3-u^2+2u-2\log(u+1)\right]+C$$

ve u yerine $(x+2)^{1/4}$ konursa :

$$\int \frac{(x+2)^{1/2}-(x+2)^{1/4}}{(x+2)^{1/4}+1}\,dx = \frac{4}{5}(x+2)^{5/4}-2(x+2)+\frac{8}{3}(x+2)^{3/4}$$

$$-4(x+2)^{1/2}+8(x+2)^{1/4}-8\log[(x+2)^{1/4}+1]+C$$

bulunur.

57. $\int \frac{x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \int dx$$

$$= \int x[\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}]dx + x + C$$

$$= \int x\sqrt{x+2}\,dx - \int x\sqrt{x+1}\,dx + x + C$$

olarak $\sqrt{x+2}=t$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx=2t\,dt$ olup:

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx = \int t(t^2-2)\,2t\,dt$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3$$

$$= \frac{2}{15}t^3(3t^2-10)$$

$$= \frac{2}{15}(x+2)\sqrt{x+2}(3x-4)$$

ve $\sqrt{x+1}=t$ değişken dönüştürmesi ile $dx=2t\,dt$ olarak :

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int t(t^2-1)\,2t\,dt$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3$$

$$= \frac{2}{15}t^3(3t^2-5)$$

$$= \frac{2}{15}(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1}$$

elde edilip yukarıdaki ifadede yerlerine konursa :

$$\int \frac{x+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\,dx =$$

$$\frac{2}{15}(x+2)(3x-4)\sqrt{x+2} - \frac{2}{15}(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1} + x + C$$

bulunur.

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$ *integralini hesaplayınız.*

$\sqrt{1-x^2} = t(1-x)$ değişken dönüştürmesi yapılırsa :

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}\ ,\quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}\ ,\quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}$$

olarak :

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2} = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

ve $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ olduğu gözönüne alınarak :

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{1-x^2}+1-x}{\sqrt{3}(1-x)} + C$$

bulunur.

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ *integralini hesaplayınız.*

$x=t^6$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx=6\,t^5\,dt$ olarak :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6\,t^5\,dt}{t^3+t^2}$$

$$= \int \frac{6t^3\,dt}{t+1}$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log(t+1) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log(\sqrt[6]{x}+1) + C$$

bulunur.

60. $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$ *integralini hesaplayınız.*

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ olarak :

$$\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1} = \int \frac{dt}{-t^2+t+2}$$

$$= \int \frac{dt}{(2-t)(t+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{t+1}{t-2} + C$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2} + C$$

bulunur.

61. $\int \frac{(1-a\cos x)\,dx}{1-2a\cos x + a^2}$ *integralini hesaplayınız.*

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, olarak :

$$\int \frac{(1-a\cos x)\,dx}{1-2a\cos x + a^2} = \int \frac{1-\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}}{1-2a\frac{1-t^2}{1+t^2}+a^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{(1+a)t^2-(1-a)}{[(1+a)^2t^2+(1-a)^2](1+t^2)}\,dt$$

bulunur. Bu integrali hesaplamak için de içindeki kesri basit kesirlere ayırırsak :

$$\frac{(1+a)t^2-(1-a)}{[(1+a)^2t^2+(1-a)^2](1+t^2)}=\frac{At+B}{(1+a)^2t^2+(1-a)^2}+\frac{Ct+D}{1+t^2}$$

ve $A=0$, $B=\frac{1}{2}(1-a^2)$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}$ olarak :

$$2\int\frac{(1+a)t^2-(1-a)}{[(1+a)^2t^2+(1-a)^2](1+t^2)}\,dt=$$

$$=\int\frac{(1-a^2)\,dt}{(1+a)^2t^2+(1-a)^2}+\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}t\right)+\operatorname{arctg} t+C$$

elde edilir. Buna göre :

$$\int\frac{(1-a\cos x)\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}+C$$

dir.

62. $\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}$ *integralini hesaplayınız.*

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ değişken dönüştürmesi yapılırsa :

$$dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\ ,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad 1-\cos x=\frac{2t^2}{1+t^2}$$

olarak :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\cos x(1-\cos x)}}=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}\,\frac{2t^2}{1+t^2}}}$$

$$=\int\frac{2\,dt}{\sqrt{2}\,t\sqrt{1-t^2}}$$

elde edilir. Bu integrali hesaplamak için de $t=\sin\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dt=\cos\varphi\,d\varphi$ ve $\sqrt{1-t^2}=\cos\varphi$ olarak :

$$\int\frac{2\,dt}{\sqrt{2}\,t\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$$

$$= \sqrt{2} \int \operatorname{cosec} \varphi \, d\varphi$$

$$= \sqrt{2} \log (\operatorname{cosec} \varphi - \operatorname{cotg} \varphi) + C$$

$$= \sqrt{2} \log \left[\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right] + C$$

$$= \sqrt{2} \log \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} + C$$

$$= \sqrt{2} \log \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t} + C$$

bulunur. Buna göre :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x (1 - \cos x)}} = \sqrt{2} \log \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C$$

$$= \sqrt{2} \log \left[\operatorname{cotg} \frac{x}{2} - \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2} - 1} \right] + C$$

dir.

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

63. $\int (2 + 5x^2)^8 \, x \, dx$ — Cevap : $\frac{1}{90} (2 + 5x^2)^9 + C$

64. $\int \sec^5 \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ — Cevap : $\frac{1}{5} \sec^5 \theta + C$

65. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{3x^2 + 2}}$ — Cevap : $\frac{1}{3} \sqrt{3x^2 + 2} + C$

66. $\int \frac{3x + 1}{\sqrt[3]{3x^2 + 2x + 1}} \, dx$ — Cevap : $\frac{3}{4} (3x^2 + 2x + 1)^{2/3} + C$

67. $\int \frac{\cos \theta}{1 + \sin^2 \theta} \, d\theta$ — Cevap : $\operatorname{arctg}(\sin \theta) + C$

68. $\int \cos \theta \, (2 - \sin \theta)^3 \, d\theta$ — Cevap : $-\frac{1}{4} (2 - \sin \theta)^4 + C$

69. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx$ — Cevap : $\frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C$

70. $\int x \cos \pi x^2 \, dx$ — Cevap : $\frac{1}{2\pi} \sin \pi x^2 + C$

71. $\int \sin(\operatorname{tg}\theta)\sec^2\theta\, d\theta$ Cevap : $-\cos(\operatorname{tg}\theta)+C$

72. $\int \frac{\sec^2(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}\, dx$ Cevap : $x+C$

73. $\int \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}\, dx$ Cevap : $\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+C$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ Cevap : $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}+C$

75 $\int x\sec x^2\, dx$ Cevap : $\frac{1}{2}\log(\cdot ec\, x^2+\operatorname{tg} x^2)+C$

76. $\int \frac{x\, dx}{1+x^4}$ Cevap : $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$

77. $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{a+b\cos^2\theta}$ Cevap : $-\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cos\theta\right)+C$

78. $\int e^x\operatorname{tg} e^x\, dx$ Cevap ; $\log\sec e^x+C$

79. $\int \frac{dx}{(x-2)^2+4}$ Cevap : $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C$

80. $\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}-9}$ Cevap : $\frac{1}{6}\log\frac{e^x-3}{e^x+3}+C$

81. $\int \frac{a^x\, dx}{\sqrt{1-a^{2x}}}$ Cevap : $\frac{1}{\log a}\arcsin a^x+C$

82. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\log^2 x}}$ Cevap : $\arcsin\frac{\log x}{2}+C$

83. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x-4x^2}}$ Cevap : $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{2}}+C$

84. $\int \frac{(5x-3)\, dx}{x^2+6x+12}$ Cevap : $\frac{5}{2}\log(x^2+6x+12)-6\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{3}}+C$

85. $\int \frac{(x+2)\, dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ Cevap : $3\arcsin\frac{x-1}{2}-\sqrt{3+2x-x^2}+C$

86. $\int \frac{(1-x)\, dx}{3x^2-4x+3}$ Cevap : $-\frac{1}{6}\log(3x^2-4x+3)+\frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3x-2}{\sqrt{5}}+C$

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ Cevap : $\log(x+a+\sqrt{2ax+x^2})+C$

88. $\int \frac{x\, dx}{x^4+2x^2-3}$ Cevap : $\frac{1}{8}\log\frac{x^2-1}{x^2+3}+C$

89. $\int x\sin x\, dx$ Cevap : $-x\cos x+\sin x+C$

90. $\int \arccos x\, dx$ Cevap : $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$

91. $\int \log x \, dx$ Cevap : $x(\log x - 1) + C$

92. $\int x e^{-x} \, dx$ Cevap : $-e^{-x}(x+1) + C$

93. $\int x^2 \cos x \, dx$ Cevap : $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

94. $\int x \log x \, dx$ Cevap : $\frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right) + C$

95. $\int \log^2 x \, dx$ Cevap : $x(\log^2 x - 2\log x + 2) + C$

96. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Cevap : $-\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{1/2} + C$

97. $\int x^3 \sqrt{a - x^2} \, dx$ Cevap : $-\frac{(a-x^2)^{3/2}}{15}(2a + 3x^2) + C$

98. $\int \sec^3 x \, dx$ Cevap : $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \log(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$

99. $\int x \sin x \cos x \, dx$ Cevap : $\frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + C$

100. $\int x^2 \log^2 x \, dx$ Cevap : $\frac{x^3}{3}\left(\log^2 x - \frac{2}{3}\log x + \frac{2}{9}\right) + C$

101. $\int x^2 e^{ax} \, dx$ Cevap : $\frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C$

102. $\int \cos x \log \sin x \, dx$ Cevap : $\sin x(\log \sin x - 1) + C$

103. $\int \frac{1}{x} \log(\log x) \, dx$ Cevap : $[\log(\log x) - 1] \log x + C$

104. $\int \sec^2 x \log \operatorname{tg} x \, dx$ Cevap : $\operatorname{tg} x(\log \operatorname{tg} x - 1) + C$

105. $\int e^x \sin x \, dx$ Cevap : $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

106. $\int e^{2x} \cos x \, dx$ Cevap : $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C$

107. $\int e^{-2x}(\cos x - \sin x) dx$ Cevap : $\frac{e^{-2x}}{5}(3 \sin x - \cos x) + C$

108. $\int x^2 \log(x-3) \, dx$ Cevap : $\frac{x^3 - 27}{3} \log(x-3) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x\right) + C$

109. $\int x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$ Cevap : $\frac{1}{3}(x^3+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{15} x^{5/2} + \frac{1}{9} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^{1/2} + C$

110. $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$ Cevap : $\frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \log(1+x^2) + C$

111. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ Cevap : $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C$

112. $\int \frac{(x^2 + 3x + 1)\, dx}{(x-1)(x+2)(3x-2)}$ Cevap : $\frac{5}{3} \log(x-1) - \frac{1}{24} \log(x+2) - \frac{31}{24} \log(3x-2) + C$

113. $\int \frac{(2x^2-1)\, dx}{(x-2)^3(x+1)}$ Cevap : $\frac{1}{27} \log(x-2) - \frac{17}{9(x-2)} - \frac{7}{6(x-2)^2} - \frac{1}{27} \log(x+1) + C$

114. $\int \frac{3x^2-4x+2}{(x-1)^2(2x^2+x+1)} dx$ Cevap : $\frac{3}{16} \log(x-1) - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{3}{32} \log(2x^2 + x + 1) + \frac{65}{16\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C$

115. $\int \frac{x^2+4x+1}{(x^2+x+2)^2} dx$ Cevap · $-\frac{5\left(x+\frac{1}{2}\right)}{7(x^2+x+2)} + \frac{4}{7\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{3}{2(x^2+x+2)} + C$

116 $\int \frac{(x^3-2)\, dx}{(x+3)(x-1)}$ Cevap . $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{29}{4} \log(x+3) - \frac{1}{4} \log(x-1) + C$

117 $\int \frac{x^4 - 3x + 2}{(x+2)^2(x+1)^2} dx$ Cevap · $x - \frac{24}{x+2} - \frac{6}{x+1} + 13 \log(x+2) - 19 \log(x+1) + C$

118 $\int \frac{x\, dx}{x^3+1}$ Cevap : $-\frac{1}{3} \log(x+1) + \frac{1}{6} \log(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

119 $\int \frac{2x^2+8x+42}{(x^2+2x+10)^2} dx$ Cevap · $\frac{x-1}{x^2+2x+10} + \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C$

120 $\int \frac{6\, dx}{2x^4 - x^2 - 1}$ Cevap · $\log(x-1) - \log(x+1) - \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2}\, x + C$

121 $\int \frac{(2+\operatorname{tg}^2\theta) \sec^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^3\theta} d\theta$ Cevap · $\log(1+\operatorname{tg}\theta) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg}\theta - 1}{\sqrt{3}} + C$

122 $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$ Cevap $\frac{1}{3} \log(x+1) - \frac{1}{6} \log(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

123 $\int \frac{(x^2-x)}{x^4+3x^2+2} dx$ Cevap $\frac{1}{2} \log \frac{x^2+2}{x^2+1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} x + C$

124 $\int \frac{x^2\, dx}{x^4+x^2-2}$ Cevap · $\frac{1}{6} \log \frac{x-1}{x+1} + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

125. $\int \frac{x^4+11x-6}{x^3+8}\,dx$ Cevap : $\frac{x^2}{2}+\log\frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{x+2}+C$

126. $\int \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 dx$ Cevap : $\frac{1}{2}\,\text{arctg}\,x-\frac{x}{2(x^2+1)}+C$

127. $\int \frac{x^5-2x+1}{(x^2+1)^3}\,dx$ Cevap : $\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{3x+8}{8(x^2+1)}+\frac{x+1}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\,\text{arctg}\,x+C$

128. $\int \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2 dx$ Cevap : $\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{x}{2(x^2-1)}+C$

129. $\int \frac{2\,dx}{x(x^2+1)^2}$ Cevap : $\frac{1}{x^2+1}+\log\frac{x^2}{x^2+1}+C$

130. $\int \frac{2\,dx}{x^2(x^2+1)^2}$ Cevap : $-\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}-3\,\text{arctg}\,x+C$

131. $\int \frac{\left(1-\frac{4}{x+1}\right)dx}{x-\frac{4-\frac{10}{x+2}}{1-\frac{1}{x+2}}}$ Cevap : $\log\frac{(x-1)^2}{x-2}+C$

132. $\int \frac{\cos^2 4x}{\sin^3 4x}\,dx$ Cevap : $\frac{1}{16}\log\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}-\frac{\cos 4x}{8\sin^2 4x}+C$

133. $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x\,dx$ Cevap : $\frac{2}{3}\sin^{3/2}x-\frac{4}{7}\sin^{7/2}x+\frac{2}{11}\sin^{11/2}x+C$

134. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$ Cevap : $-\frac{\sin^3 2x}{48}+\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+C$

135. $\int \text{tg}\,\frac{x}{2}\sec^{-1/2}\frac{x}{2}\,dx$ Cevap : $-4\cos^{1/2}\frac{x}{2}+C$

136. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^{2/3}x}$ Cevap : $\frac{3}{7}\cos^{7/3}x-3\cos^{1/3}x+C$

137. $\int \sec^4 3x\,dx$ Cevap : $\frac{1}{3}\,\text{tg}\,3x+\frac{1}{9}\,\text{tg}^3\,3x+C$

138. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[4]{\cos x}}$ Cevap : $4\sec^{1/4}x+\frac{4}{7}\cos^{7/4}x+C$

139. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\sec^4 x}$ Cevap : $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C$

140. $\int \sin^6 x\,dx$ Cevap : $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+C$

141. $\int \text{tg}^4 x\,dx$ Cevap : $x-\text{tg}\,x+\frac{1}{3}\,\text{tg}^3\,x+C$

142. $\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$ Cevap : $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$

143. $\int \sin 2x \cos 6x \, dx$ Cevap : $-\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{8}\cos 4x + C$

144. $\int \cos 5x \cos 3x \, dx$ Cevap : $\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

145. $\int \sin \frac{4x}{3} \sin \frac{2x}{3} \, dx$ Cevap : $-\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{4}\sin \frac{2x}{3} + C$

146. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ Cevap : $\log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

147. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ Cevap : $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

148. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$ Cevap : $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

149. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ Cevap : $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$

150. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Cevap : $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

151. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$ Cevap : $-\frac{\sqrt{9+x^2}}{9x} + C$

152. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$ Cevap : $\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

153. $\int \frac{dx}{2-\sin x}$ Cevap : $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right] + C$

154. $\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$ Cevap : $-\operatorname{tg}\frac{x}{2} + x + C$

155. $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{1+\sin x}$ Cevap : $-\frac{1}{2}\log\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \frac{1}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$

156. $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$ Cevap : $\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$

157. $\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x}$ Cevap : $\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x + C$

158. $\int \frac{dx}{3-\sin x+2\cos x}$ Cevap : $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right) + C$

159. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+1}$ Cevap : $\log\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right) + C$

160. $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$ Cevap : $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$

161. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ Cevap : $2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x})+C$

162. $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x}+5}$ Cevap : $\log(x+2\sqrt{x}+5)-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}+1}{2}+C$

163. $\int \frac{dx}{x-4\sqrt{x}}$ Cevap : $2\log(\sqrt{x}-4)+C$

164. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ Cevap : $\log\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}+C$

165. $\int \frac{(14-5x)\,dx}{(x+8)(1-x)^{3/2}}$ Cevap : $\frac{2}{\sqrt{1-x}}+2\log\frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt{1-x}+3}+C$

166. $\int \frac{(x^4+4)^{1/2}}{x^3}\,dx$ Cevap : $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^4+4}}{x^2}-\frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{x^4+4}-x^2}{\sqrt{x^4+4}+x^2}+C$

167. $\int \frac{2\,dx}{(x^2+4x)\sqrt{x+1}}$ Cevap : $\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{3}}+C$

168. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$ Cevap : $-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{12x^3}+C$

169. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ Cevap : $-\arcsin\frac{1+x}{2x}+C$

170. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+4x+5x^2}}$ Cevap : $-\log\frac{1+2x+\sqrt{1+4x+5x^2}}{x}+C$

171. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}$ Cevap : $\frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x}-3\arcsin\frac{1-3x}{6x}+C$

172. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x^2-12x+5}}$ Cevap : $-\frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{2x-3}+C$

173. $\int (x^2+4)^{3/2}\,dx$ Cevap : $\frac{1}{4}x(x^2+10)\sqrt{x^2+4}+6\log(x+\sqrt{x^2+4})+C$

174. $\int \frac{dx}{(2+x)(x+1)^{3/2}}$ Cevap : $-\frac{2}{\sqrt{x+1}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$

11. BELİRLİ İNTEGRAL

1. $x_1 = 0$ *ve* $x_{n+1} = \dfrac{3}{2}$ *olduğuna göre:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(x_i + \frac{\Delta x_i}{2}\right)\sqrt{1+(2x_i+\Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$$

limitini hesaplayınız.

Duhamel teoremine göre:

$$\lim_{\Delta x_i\to 0} \frac{2\pi\left(x_i + \dfrac{\Delta x_i}{2}\right)\sqrt{1+(2x_i+\Delta x_i)^2}\,\Delta x_i}{2\pi x_i\sqrt{1+(2x_i)^2}\,\Delta x_i} = 1$$

olup:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(x_i + \frac{\Delta x_i}{2}\right)\sqrt{1+(2x_i+\Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i \sqrt{1+4x_i^2}\,\Delta x_i$$

$$= \int_0^{3/2} 2\pi x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{6}\left|(1+4x^2)^{3/2}\right|_0^{3/2} = \frac{\pi}{6}(10\sqrt{10}-1)$$

dır.

2. $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx - \int_4^5 f(x)\,dx$ *toplamı yerine eşdeğer bir integral bulunuz.*

$$\int_1^5 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx - \int_4^5 f(x)\,dx =$$

$$= \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx - \int_4^5 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^6 f(x)\,dx$$

dir.

3. $$\int_1^3 f(x)\,dx - \int_3^4 f(x)\,dx - 2\int_2^3 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx - \int_5^2 f(x)\,dx + \int_5^4 f(x)\,dx$$

integraline eşdeğer bir integral bulunuz.

Verilen toplam :

$$= \int^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx - \int_3^4 f(x)\,dx - 2\int_2^3 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx - \int_4^5 f(x)\,dx$$

şeklinde yazılarak

$$= \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx - \int_4^5 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx - \int_4^5 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^4 f(x)\,dx$$

bulunur.

4. *$x=\cos 2y$ olduğuna göre $\int_0^1 y\,dx$ integralini hesaplayınız.*

$$x = \cos 2y \quad \text{den} \quad y = \frac{1}{2}\arccos x \quad \text{olup :}$$

$$\int_0^1 y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \arccos x\,dx$$

integrali elde edilir. Bunu hesaplamak üzere de kısmi integras yon kuralını uygularsak :

$$= \frac{1}{2}\left| x\arccos x - \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left| x\arccos x - \sqrt{1-x^2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

bulunur.

5. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{3x-x^2}}{x^3}$ *integralini hesaplayınız.*

$\sqrt{3x-x^2} = tx$ değişken dönüştürmesi yapılırsa:

$$x = \frac{3}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-6t\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{3x-x^2} = \frac{3t}{t^2+1},$$

$t = \sqrt{\dfrac{3-x}{x}}$ ve $x=1$ için $t=\sqrt{2}$, $x=3$ için $t=0$ olarak:

$$\int_1^3 \frac{\sqrt{3x-x^2}}{x^3}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^0 \frac{\dfrac{3t}{t^2+1}}{\dfrac{27}{(t^2+1)^3}} \cdot \frac{-6t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^0 t^2\,dt = -\frac{2}{9}\left| t^3 \right|_{\sqrt{2}}^0$$

$$= \frac{2}{9} \cdot 2^{3/2} = \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

bulunur.

6. $\int_0^{\pi/3} (1-\cos 3\theta)^4 \, d\theta$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int_0^{\pi/3} (1-\cos 3\theta)^4 \, d\theta = \int_0^{\pi/3} (1-4\cos 3\theta+6\cos^2 3\theta-4\cos^3 3\theta+\cos^4 3\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[1 - 4\cos 3\theta + 3(1+\cos 6\theta) - 4\cos^3 3\theta + \frac{1}{4}(1+\cos 6\theta)^2\right] d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(4 - 4\cos 3\theta + 3\cos 6\theta + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 6\theta + \frac{1}{4}\cos^2 6\theta - 4\cos^3 3\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(\frac{17}{4} - 4\cos 3\theta + \frac{7}{2}\cos 6\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 12\theta - 4\cos^3 3\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left[\frac{35}{8} - 4\cos 3\theta + \frac{7}{2}\cos 6\theta + \frac{1}{8}\cos 12\theta - 4\cos 3\theta(1-\sin^2 3\theta)\right] d\theta$$

$$= \left| \frac{35}{8}\theta - \frac{4}{3}\sin 3\theta + \frac{7}{12}\sin 6\theta + \frac{1}{96}\sin 12\theta - \frac{4}{3}\sin 3\theta + \frac{4}{9}\sin^3 3\theta \right|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{35\pi}{24}$$

7. $\int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$ *integralini hesaplayınız.*

$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$ değişken dönüştürmesi yapılırsa:

$d\theta = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ ve $\theta = 0$ için $t = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ için $t = \sqrt{3}$ olarak:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left[5+\frac{4-4t^2}{1+t^2}\right]}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{t^2+9}$$

$$= \frac{2}{3}\left|\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\right|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{9}$$

bulunur

8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int \frac{dx}{x^4+4} = \frac{1}{16}\log\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1) + C$$

olup:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4} = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} \frac{dx}{x^4+4}$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{16}\log\frac{A^2+2A+2}{A^2-2A+2} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(A+1) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(A-1)\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

dır.

9. $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ *integralini hesaplayınız.*

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left| -\frac{1}{x-1} \right|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0} \left| -\frac{1}{x-1} \right|_{1+\varepsilon}^4$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\frac{1}{-\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{3} \right)$$

olarak heriki limit de mevcut değildir. Buna göre integral de mevcut değildir.

10. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *elipsinin alanını hesaplayınız.*

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \text{ olup:}$$

$$F = 4 \int_0^a y\, dx = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

elde edilir ; Bu integrali hesaplamak için de $x = a \sin\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa :

$$dx = a \cos\varphi\, d\varphi \, , \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\varphi \text{ ve } x = 0 \text{ için } \varphi = 0;$$

$x = a$ için $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olarak :

$$F = \frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\varphi\, d\varphi = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= 2ab \left| \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi a b$$

bulunur.

11. *$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

$y = \mp (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ olup eğri şekil 25 deki eğridir.

$$F = \int_0^a y dx = 4 \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx$$

olarak $x^{1/3} = a^{1/3} \sin \varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa:

$(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} = a \cos^3\varphi$, $x^{2/3} = a^{2/3} \sin^2\varphi$, $dx = 3a \sin^2\varphi \cos \varphi \, d\varphi$

ve $x = 0$ için $\varphi = 0$; $x = a$ için $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olarak:

$$F = 4 \int_0^{\pi/2} a \cos^3\varphi \, 3a \sin^2\varphi \cos \varphi \, d\varphi$$

$$= 12 a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^4\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{12 a^2}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi)(1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{3 a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\varphi)(1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{3 a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi) \, d\varphi$$

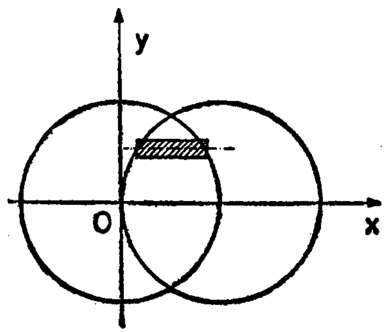
$$= \frac{3 a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1 - \cos 4\varphi}{2} + \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi\right] d\varphi$$

$$= \frac{3\,a^2}{2}\left|\,\frac{1}{2}\,\varphi - \frac{1}{8}\sin 4\varphi + \frac{1}{6}\sin^3 2\varphi\,\right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3\,a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\,\pi\,a^2}{8}$$

bulunur.

12. *$x^2 + y^2 = 4$ ve $x^2 + y^2 = 4x$ dairelerinin sınırladıkları alanı hesaplayınız.*



Şekil 101

(Sekil 101). Dairelerin kesişme noktaları $(1, \sqrt{3})$ ve $(1, -\sqrt{3})$ dir. Seçilen alan elemanının alanı :

$$\Delta F_i = (x_{2i} - x_{1i})\Delta y_i$$

$$= [\sqrt{4-y_{2i}^2} - (2-\sqrt{4-y_{1i}^2})]\Delta y_i$$

olup:

$$F = 2\int_0^{\sqrt{3}} [\sqrt{4-y^2} - 2 + \sqrt{4-y^2}]\,dy$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1)\,dy$$

elde edilir. Bunu hesaplamak için de $y = 2\sin\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dy = 2\cos\omega\, d\varphi$ ve $y = 0$ için $\varphi = 0$; $y = \sqrt{3}$ için $\varphi = \frac{\pi}{3}$ olarak :

$$F = 4\int_0^{\pi/3} (2\cos\varphi - 1)\,2\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= 8\int_0^{\pi/3} (2\cos^2\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= 8\int_0^{\pi/3} (1 + \cos 2\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= 8\left|\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \sin\varphi\right|_0^{\pi/3}$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

bulunur.

13. *$x^2 = 4ay$ ve $y = \frac{8a^3}{x^3 + 4a^2}$ $(a>0)$ eğrilerinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

İki eğrinin kesişme noktaları $x = 2a$ ve $x = -2a$ apsisli noktalar ve hesaplanacak alanın oy eksenine göre simetrik olduğu göze önünde tutulârak :

$$F = 2\int_0^{2a}\left[\frac{8a^3}{x^2+4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right]dx$$

$$= 2\left|4a^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2a} - \frac{x^3}{12\,a}\right|_0^{2a}$$

$$= \frac{2}{3}(3\pi - 2)\,a^2$$

bulunur.

14. *$y^2 = 2px$ parabolu ile mebsutu arasında kalan alanı hesaplayınız.*

Mebsut eğrisinin denklemi Bölüm 8, problem 67 de $\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3$ olarak bulunmuş ve her iki eğri Şekil 100'de gösterilmişti. Bu denklemde β yerine y ve α yerine x yazılırsa :

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$$

elde edilir. İki eğrinin kesişme noktaları $x = 4p$ apsisli noktalar ve hesaplanacak alanın ox eksenine göre simetrik olduğu göz önünde tutulursa :

$$F=2\left[\int_0^{4p} \sqrt{2px}\,dx - \int_p^{4p} \sqrt{\frac{8}{27p}}\,(x-p)^{3/2}\,dx\right]$$

$$=2\left[\left|\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{3/2}\right|_0^{4p} - \left|\frac{2}{5}\sqrt{\frac{8}{27p}}\,(x-p)^{5/2}\right|_p^{4p}\right]$$

$$=\frac{88\sqrt{2}}{15}p^2$$

bulunur.

15. *Parametrik denklemleri $x = t^2$, $y = 4t - t^3$ olan eğrinin halkasının sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri şekil 74'de gösterilen eğri olup aranan alan :

$$F=2\int_0^4 y\,dx = 2\int_0^2 (4t - t^3)\,2t\,dt$$

$$= 4\int_0^2 (4t^2 - t^4)\,dt$$

$$= 4\left|\frac{4t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right|_0^2 = \frac{256}{15}$$

16. $r = \dfrac{6}{3+2\cos\theta}$ *eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri bir elips olup alanı $F = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ formülünün uygulanması ile :

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{36\,d\theta}{(3+2\cos\theta)^2}$$

dir. Bu integrali hesaplamak için de $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = t$ dönüştürmesi yapılırsa :

$d\theta = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ ve $\theta=0$ için $t=0$; $\theta=\pi$ için $t=\infty$ olarak :

$$F = \int_0^{\infty} \frac{36 \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2}}{\left(3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \int_0^{\infty} \frac{72\,(1+t^2)}{(t^2+5)^2}\,dt$$

$$= 72 \int_0^{\infty} \frac{(t^2+5)-4}{(t^2+5)^2}\,dt = 72 \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t^2+5} - \frac{4}{(t^2+5)^2}\right] dt$$

ve :

$$\int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}}$$

$$\int \frac{4\,dt}{(t^2+5)^2} = 4\left(\frac{1}{10\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} + \frac{1}{10}\,\frac{t}{t^2+5}\right)$$

olup

$$F = 72 \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} - \frac{2t}{5(t^2+5)} \right|_0^{\infty}$$

$$= 72 \left| \frac{3}{5\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} - \frac{2t}{5(t^2+5)} \right|_0^{\infty}$$

$$= 72\left(\frac{3}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right) = \frac{108\,\pi}{5\sqrt{5}}$$

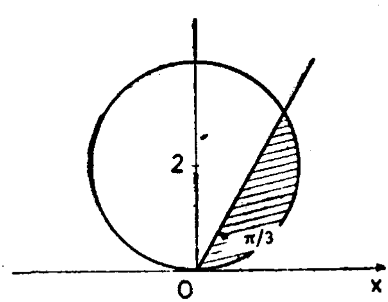
dır.

17. *$r = 4\sin\theta$ dairesi ile $\theta = \frac{\pi}{3}$ doğrusunun sınırladığı alanı hesaplayınız.*

$$F = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta \text{ formülünden :}$$

(Şekil 102)

$$F = \int_0^{\pi/3} 16 \sin^2\theta\,d\theta$$



Şekil 102

$$= 4\int_0^{\pi/3} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 4\left|\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{\pi/3}$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$

18. *$r = 2 - 4\sin\theta$ eğrisinin büyük halkasının sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri Şekil 82 de gösterilen eğri olup büyük halkasının yarısı θ nın $-\frac{\pi}{2}$ ile $\frac{\pi}{6}$ değerleri arasındaki değerlerine karşılık çizilmiştir. Eğri $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetrik olduğundan:

$$F = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/6} \frac{1}{2}(2 - 4\sin\theta)^2\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} (4 - 16\sin\theta + 16\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} (12 - 16\sin\theta - 8\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \left|12\theta + 16\cos\theta - 4\sin 2\theta\right|_{-\pi/2}^{\pi/6}$$

$$= 8\pi + 6\sqrt{3}$$

dir.

19. *Kutupsal denklemi $r = 2 + \sin 3\theta$ olan eğrinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri şekil 95 deki eğri olup aranan alan:

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\sin 3\theta)^2\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4+4\sin 3\theta+\sin^2 3\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+4\sin 3\theta-\frac{1}{2}\cos 6\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{9}{2}\theta-\frac{4}{3}\cos 3\theta-\frac{1}{12}\sin 6\theta\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{9}{2}\pi$$

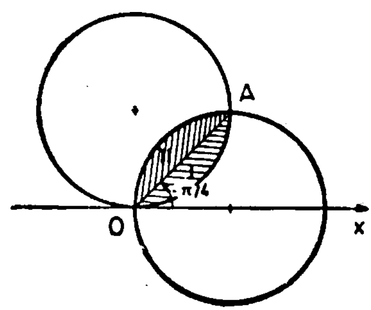
dir.

20. *$r = 4\cos\theta$ ve $r = 4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alanı hesaplayınız.*

Eğriler şekil 103 de gösterilen daireler olup kesişme noktaları :

$r = 4\cos\theta = 4\sin\theta$, $\quad \operatorname{tg}\theta = 1$,

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$



Şekil 103

kutupsal açılı noktalardır. Buna göre aranan alan :

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}16\sin^2\theta\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}16\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4}(1-\cos 2\theta)\,d\theta+4\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\left|\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{\pi/4}+4\left|\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi - 2 + \pi - 2 = 2\pi - 4$$

dir.

21. *$r = a(1 + \cos\theta)$ ve $r = 2a\cos\theta$ eğrileri arasında kalan alanı hesaplayınız.*

Eğriler (Şekil 104) kutupsal eksene göre simetrik olup aranan alan :

$$F = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta - 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} 4a^2 \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta - 2a^2 \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta \, d\theta$$

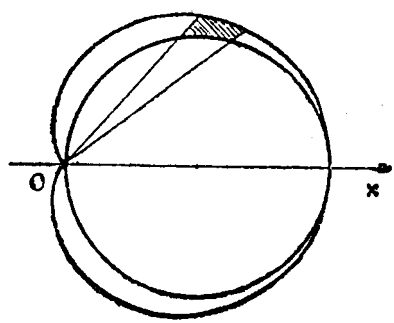
$$= a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta - 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \left|\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right|_0^{\pi}$$

$$- 2a^2 \left|\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3\pi}{2} a^2 - \pi a^2 = \frac{1}{2}\pi a^2$$

dir.



Şekil 104

22. *Kutupsal denklemi $r = a(2 + \cos 2\theta)$ olan eğrinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri şekil 96 da gösterilen şekil olup aranan alan :

$$F = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} a^2 (2 + \cos 2\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 2\,a^2 \int_0^{\pi/2} (4 + 4\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\,a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{9}{2} + 4\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= 2\,a^2 \left| \frac{9}{2}\,\theta + 2\sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{9}{2}\,\pi\,a^2$$

dir.

23. *Kutupsal denklemi $r = a(\sin 2\theta + \cos 2\theta)$ olan eğrinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri şekil 91 de gösterilen eğri olup sınırladığı alan bir halkasının sınırladığı alanın dört katı olarak :

$$F = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/8}^{3\pi/8} a^2(\sin 2\theta + \cos 2\theta)^2\,d\theta$$

$$= 2\,a^2 \int_{-\pi/8}^{3\pi/8} (1 + 2\sin 2\theta \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2\,a^2 \left| \theta + \sin^2 2\theta \right|_{-\pi/8}^{3\pi/8}$$

$$= 2a^2\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\right) = \pi\,a^2$$

dir.

24. *$r = a(1 + \sin 2\theta)$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri şekil 94 de gösterilen eğri olup istenen alan :

$$F = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2(1 + \sin 2\theta)^2\,d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\sin 2\theta + \sin^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left[1 + 2\sin 2\theta + \frac{1-\cos 4\theta}{2}\right] d\theta$$

$$= a^2 \left| \frac{3}{2}\,\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta \right|_0^{\pi}$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}\cdot\pi - 1 + 1\right) = \frac{3\,\pi\, a^2}{2}$$

dir.

25. $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ *eğrisinin asimptodu etrafında dönmesinden meydana gelen hacmı hesaplayınız.*

Asimptod $y=0$ doğrusu yani ox ekseni olup istenen hacım:

$$V = 2\pi \int_0^{\infty} y^2\, dx = 2\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{8a^3}{x^2+4a^2}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{64\, a^6}{(x^2+4a^2)^2}\, dx$$

ve $x = 2a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $dx = 2a\sec^2\varphi\, d\varphi$ ve $x = 0$ için $\varphi = 0$, $x = \infty$ için $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ olarak:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{64a^6.2a\sec^2\varphi}{[4a^2(1+\mathrm{tg}^2\varphi)]^2}\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{128\, a^7 \sec^2\varphi\, d\varphi}{16\, a^4 \sec^4\varphi}$$

$$= 16\,\pi\, a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= 8\,\pi\, a^3 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi$$

$$= 8\pi a^3 \left| \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right|_0^{\pi/2}$$

$$= 4\pi^2 a^3$$

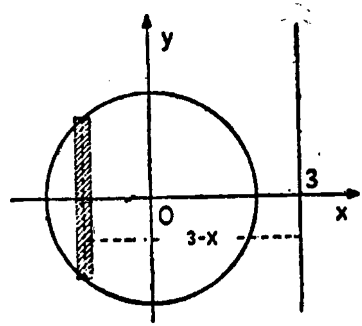
bulunur.

26 *$x^2 + y^2 = 4$ dairesinin $x = 3$ doğrusu etrafında dönmesinden meydana gelen hacmı hesaplayınız.*

Şekil 105 den :

$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} 2y(3-x)\,dx \quad \text{yazılarak}$$

$$= 4\pi \int_{-2}^{2} (3-x)\sqrt{4-x^2}\,dx$$



Şekil 105

$$= 12\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx - 4\pi \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= \left| 12\pi\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right) + \frac{4\pi}{3}(4-x^2)^{3/2} \right|_{-2}^{+2} = 24\pi^2$$

bulunur.

27. *Yarı çapı r olan bir küreden h kalınlığında bir küre parçası kesiliyor. İntegral hesap yardımiyle bu parçanın hacmının $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$ olduğunu gösteriniz.*

$V = \pi \int_a^b y^2\,dx$ formülünden faydalanılarak ve $y^2 = r^2 - x^2$,

$a = r - h$, $b = r$ olduğu gözönünde tutularak (şekil 106).

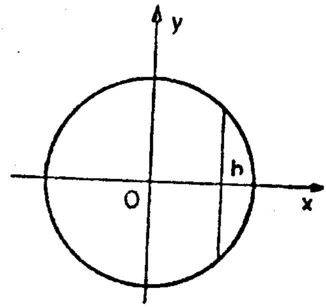
$$V = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{r-h}^{r} = \frac{\pi}{3} \left| 3\,r^2 x - x^3 \right|_{r-h}^{r}$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[3r^3 - r^3 - 3r^2(r-h) - (r-h)^3 \right]$$

$$= \frac{\pi\, h^2}{3} (3\,r - h)$$

bulunur.



Şekil 106

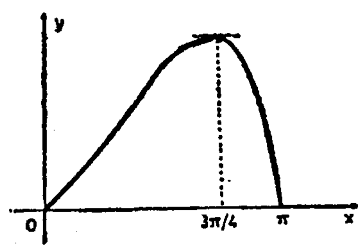
28. *$y = e^x \sin x$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = \pi$ apsisli noktaları arasında kalan kısmının ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen hacmı hesaplayınız.*

Eğri Şekil 107 de görülen eğri olup :

$$V = \pi \int_0^\pi y^2\, dx = \pi \int_0^\pi e^{2x} \sin^2 x\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi e^{2x}(1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (e^{2x} - e^{2x} \cos 2x)\, dx$$



Şekil 107

ve $\int e^{2x} \cos 2x\, dx$ integralini hesaplamak üzere de kısmi integrasyon kuralını uygularsak :

$$\int e^{2x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 2x - \int e^{2x} \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x - \int e^{2x} \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x + \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x$$

bulunarak :

$$V = \frac{\pi}{2}\left| \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \sin 2x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos 2x \right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2\pi} - \frac{1}{4} e^{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4} e^{2\pi} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\left(e^{2\pi} - 1\right)$$

elde edilir.

29. *$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ sikloidinin bir kemerinin ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen hacmı hesaplayınız.*

Eğri şekil 77'de gösterilmiş olup istenen hacım :

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2\, a(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3\, d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta)\, d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos\theta + \frac{3}{2}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)\right] d\theta$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}\cos\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta\right) d\theta$$

$$= \pi a^3 \left| \frac{5}{2}\theta - \frac{15}{4}\sin 2\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{12}\sin 3\theta \right|_0^{2\pi}$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

dır.

30. *Parametrik denklemleri $x = t^2$, $y = 4t - t^3$ olan eğrinin halkasının ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen hacmı hesaplayınız.*

Eğri şekil 74 de gösterilen eğri olup istenen hacım :

$$V=\pi\int_0^4 y^2\,dx=\pi\int_0^2 (4t-t^3)^2\,2t\,dt$$

$$=2\pi\int_0^2 (16t^2-8t^4+t^6)\,t\,dt$$

$$=2\pi\int_0^2 (16\,t^3-8\,t^5+t^7)\,dt$$

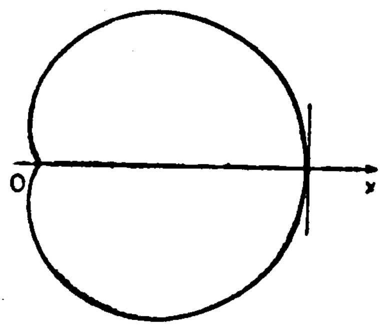
$$=2\pi\left|4t^4-\frac{4}{3}t^6+\frac{1}{8}t^8\right|_0^2$$

$$=\frac{64\,\pi}{8}$$

dir.

31. *$r=a(1+\cos\theta)$ eğrisinin kutupsal eksen etrafında dönmesinden meydana gelen cismin hacmını hesaplayınız.*

Eğri şekil 108 de görülen kardioid eğrisi olup istenen hacım



Şekil 108

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx \quad \text{formülünde :}$$

$x=r\cos\theta$, $\quad y=r\sin\theta$,
$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta$ ve
$dr=-a\sin\theta\,d\theta$ olduğundan
$dx=-a\sin\theta(1+2\cos\theta)\,d\theta$ olarak:

$$V=\pi\int_0^\pi r^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)(1+2\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\pi\int_0^\pi -a^3\sin^3\theta\,(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)\,d\theta$$

elde edilir. Bunu hesaplamak için de $\cos\theta=u$ dönüştürmesi yapılırsa $-\sin\theta\,d\theta=du$ ve $\theta=0$ için $u=1$, $\theta=\pi$ için $u=-1$ olarak :

$$V=\pi a^3\int_1^{-1}(1-u^2)(1+u)^2(1+2u)\,du=\frac{8\,\pi\,a^3}{3}$$

bulunur.

32. *$y^2 = 12x$ parabolunun odak noktasından eksenine çıkılan dikme tarafından ayrılan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.*

Odak noktasının koordinatları (3, 0) ve çıkılan dikmenin eğriyi kestiği noktaların koordinatları da (3, 6) ve (3, −6) dır.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

ve $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{6}$ ve eğrinin ox eksenine göre simetrik olduğu da göz önünde tutulursa :

$$s = 2\int_0^6 \sqrt{1 + \frac{y^2}{36}}\, dy$$

elde edilir. Bu integrali hesaplamak için de $\dfrac{y}{6} = \operatorname{tg}\varphi$ dönüşümü yapılırsa $dy = 6\sec^2\varphi\, d\varphi$; $\sqrt{1 + \dfrac{y^2}{36}} = \sec\varphi$ ve $y = 0$ için $\varphi = 0$, $y = 6$ için $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ olarak :

$$s = 12\int_0^{\pi/4} \sec^3\varphi\, d\varphi$$

$$= 12\left| \frac{1}{2}\sec\varphi\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\log(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi)\right|_0^{\pi/4}$$

$$= 6[\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)]$$

bulunur.

33. *$y = a\,ch\,\dfrac{x}{a}$ eğrisinin $x = 0$, $x = b$ apsisli noktaları arasındaki kısmının uzunluğunu hesaplayınız.*

$$s = \int_0^b ds \quad \text{ve} \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + sh^2\frac{x}{a}}\, dx = ch\frac{x}{a}\, dx$$

olarak :

$$s = \int_0^b ch \frac{x}{a}\, dx = a \left| sh \frac{x}{a} \right|_0^b = a\, sh \frac{b}{a}$$

bulunur.

34. *$y = \log \sin x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{4}$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ apsisli noktaları arasındaki kısmının uzunluğunu hesaplayınız.*

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + \text{cotg}^2 x}\, dx = \text{cosec}\, x\, dx \quad \text{olup :}$$

$$s = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{cosec}\, x\, dx = \left| -\log(\text{cosec}\, x + \text{cotg}\, x) \right|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -\log(1+0) + \log(\sqrt{2}+1) = \log(\sqrt{2}+1)$$

bulunur.

35. *Parametrik denklemleri:*

$$x = 50(1 - \cos\theta) + 50(2-\theta)\sin\theta$$
$$y = 50\sin\theta + 50(2-\theta)\cos\theta$$

olan eğrinin $\theta = 0$ ve $\theta = 2$ ye karşılık olan noktaları arasındaki kısmının uzunluğunu hesaplayınız.

$$s = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

ve

$$\frac{dx}{d\theta} = 50\sin\theta - 50\sin\theta + 50(2-\theta)\cos\theta = 50(2-\theta)\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 50\cos\theta - 50\cos\theta - 50(2-\theta)\sin\theta = -50(2-\theta)\sin\theta$$

olup :

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 50^2(2-\theta)^2\cos^2\theta + 50^2(2-\theta)^2\sin^2\theta = 50^2(2-\theta)^2$$

olarak :

$$s = \int_0^2 50(2-\theta)\,d\theta = 50 \left| 2\theta - \frac{\theta^2}{2} \right|_0^2$$

$$= 50\left(4 - \frac{4}{2}\right) = 100$$

bulunur.

36. *$r = a(1 + \sin\theta)$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.*

Eğri şekil 109 daki eğri olup uzunluğu :

$$s = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta \quad \text{den}$$

$$ds = \sqrt{a^2(1+\sin\theta)^2 + a^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

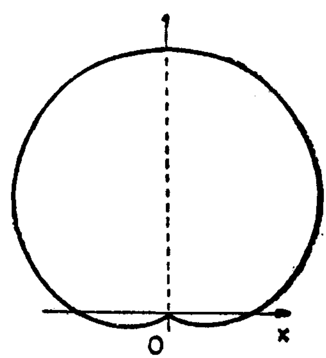
$$= \sqrt{2a^2(1+\sin\theta)}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2a^2\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta$$

$$= \sqrt{2}\,a\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

olarak :



Şekil 109

$$s = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,a\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\,a \left| 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}\,a\,(0 + 2\sqrt{2}) = 8a$$

bulunur.

37. $r = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ *eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız;*

Eğri şekil 84'deki eğri olup uzunluğu :

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta \quad \text{formülünde}$$

$$r' = a \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}$$

$$r^2 + r'^2 = a^2 \sin^6 \frac{\theta}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3} \cos^2 \frac{\theta}{3} = a^2 \sin^4 \frac{\theta}{3}$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = a \sin^2 \frac{\theta}{3} \quad \text{olarak :}$$

$$s = \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta = \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos \frac{2\theta}{3}\right) d\theta$$

$$= \frac{a}{2} \left| \theta - \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3} \right|_0^{3\pi} = \frac{3}{2} \pi a$$

dir.

38. $r = a \cos^3 \frac{\theta}{3}$ *eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.*

Eğri şekil 83'deki eğri olup uzunluğu :

$$r^2 + r'^2 = a^2 \cos^6 \frac{\theta}{3} + a^2 \cos^4 \frac{\theta}{3} \sin^2 \frac{\theta}{3} = a^2 \cos^4 \frac{\theta}{3}$$

olarak :

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \int_0^{3\pi} a \cos^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta$$

$$= \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 + \cos \frac{2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{a}{2} \left| \theta + \frac{3}{2} \sin \frac{2\theta}{3} \right|_0^{3\pi} = \frac{3\pi a}{2}$$

bulunur.

39. *$r = a\cos^4 \frac{\theta}{4}$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.*

Eğri şekil 85 deki eğri olup uzunluğu :

$$r^2 + r'^2 = a^2 \cos^6 \frac{\theta}{4}$$

olarak :

$$s = 2a \int_0^{2\pi} \cos^3 \frac{\theta}{4}\, d\theta$$

$$= 8a \left| \sin\frac{\theta}{4} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\theta}{4} \right|_0^{2\pi} = \frac{16}{3} a$$

dir.

40. *$r = \dfrac{1}{\cos^3 \frac{\theta}{3}}$ eğrisinin halkasının uzunluğunu ve sınırladığı alanı hesaplayınız.*

Eğri şekil 92 de gösterilen eğri olup halkasının uzunluğu :

$$r^2 + r'^2 = \sec^8 \frac{\theta}{3} \qquad \text{olarak}$$

$$s = 2\int_0^{\pi} \sec^4 \frac{\theta}{3}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{3} + 1\right) \sec^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta$$

$$= 2\left| \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{3} + 3\operatorname{tg} \frac{\theta}{3} \right|_0^{\pi} = 12\sqrt{3}$$

bulunur. Halkanın sınırladığı alan ise :

$$F = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \int_0^{\pi} \sec^6 \frac{\theta}{3}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{3} + 1\right)^2 \sec^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\operatorname{tg}^4 \frac{\theta}{3} + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{3} + 1 \right) \sec^2 \frac{\theta}{3} \, d\theta$$

$$= \left| \frac{3}{5} \operatorname{tg}^5 \frac{\theta}{3} + 2 \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{3} + 3 \operatorname{tg} \frac{\theta}{3} \right|_0^{\pi} = \frac{72\sqrt{3}}{5}$$

dir.

41. *$4x^2 + 16y^2 = 64$ elipsinin ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.*

$$F = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} \, dx \quad \text{formülünde :}$$

$$8x + 32 y y' = 0 \ , \quad y' = -\frac{x}{4y} \qquad \text{ve}$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{16y^2} = \frac{16y^2 + x^2}{16y^2}$$

$$= \frac{64 - 4x^2 + x^2}{16y^2} = \frac{64 - 3x^2}{16y^2}$$

olarak :

$$F = 2\pi \int_{-4}^{4} y \frac{\sqrt{64 - 3x^2}}{4y} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-4}^{4} \sqrt{64 - 3x^2} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{64 - 3x^2} + 32 \arcsin \frac{\sqrt{3}\,x}{8} \right|_{-4}^{+4}$$

$$= 8\pi \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi \right)$$

bulunur.

42. *Parametrik denklemleri $x = a\cos\theta$, $y = b + a\sin\theta$ olan dairenin ox ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen tekerlek halkanın alanını bulunuz.*

$$F_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \, ds = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + a\sin\theta) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$

formülünde $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2$ olarak :

$$F_x = 2\pi a \int_0^{2\pi} (b + a \sin\theta)\, d\theta$$

$$= 2\pi a \left| b\theta - a\cos\theta \right|_0^{2\pi} = 4\pi^2 a b$$

bulunur.

43. *$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ eğrisinin bir kemerinin ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen yüzeyin alanını hesaplayınız.*

Eğri şekil 77 de gösterilmiş olan sikloid eğrisi olup bir kemeri θ nın (0, 2π) aralığındaki değerlerine karşılık çizilmiştir; Buna göre aranan alan :

$$F = 2\pi \int_a^b y\, ds \quad \text{formülünde :}$$

$$ds = \sqrt{a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2a \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

olarak :

$$F = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta)\, 2a \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 8\pi a^2 \left| -2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi}$$

$$= 8\pi a^2 \left(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{64}{3}\pi a^2$$

44. *$r = a(1 + \cos\theta)$ eğrisinin kutupsal eksen etrafında dönmesinden meydana gelen yüzeyin alanını hesaplayınız.*

Eğri kardioid eğrisi olup kutupsal eksene göre simetrik olan bir eğridir. O halde kutupsal eksenin üst tarafında kalan kısmının döndürülmesi kâfidir. Bu kısım ise θ nın $(0, \pi)$ aralığındaki değerlerine karşılık olarak çizilmiştir. Bunlara göre yüzeyin alanı :

$$F = 2\pi \int_a^b y\, ds$$

formülünde $y = r\sin\theta = a\sin\theta(1 + \cos\theta)$ ve

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

olarak :

$$F = 2\pi \int_0^\pi 2a^2\sin\theta(1 + \cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^\pi 4\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \left| -\frac{2}{5}\cos\frac{\theta}{2} \right|_0^\pi = \frac{32\pi a^2}{5}$$

bulunur.

45. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^b f(t)\, dt = -f(x)$ olduğunu gösteriniz.

46. $f(x)$ fonksiyonu $f(-x) = -f(x)$ olacak şekilde bir fonksiyon yani tek fonksiyon ise :

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\, dx = 0$$

olduğunu gösteriniz.

47. $f(x)$ fonksiyonu $f(-x)=f(x)$ olacak şekilde bir fonksiyon yani çift bir fonksiyon ise:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

olduğunu gösteriniz.

48. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{7}{24}$

49. $\int_{0}^{1} \text{Arcsin}\,x\,dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{\pi}{2}-1$

50. $\int_{0}^{-2} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{1}{2}\log 5$

51. $\int_{0}^{1} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\text{Arctg}\,e-\frac{\pi}{4}$

52. $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\frac{\pi}{4}$

53. $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ integralini hesaplayınız. Cevap: $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

54. $y=\sqrt{a^2-x^2}$ olduğuna göre $\int_{0}^{a} y^2\,dx = \frac{2a^3}{3}$ olduğunu gösteriniz.

55. $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ olduğuna göre $\int_{0}^{a} 2\pi x^2\,dy$ integralini hesaplayınız.

Cevap: $\frac{2\pi a^3}{15}$

56. $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ olduğuna göre $\int_{0}^{r} y\,dx$ integralini hesaplayınız.

Cevap: $\frac{\pi r^2}{4}$

57. $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ olduğuna göre $\int_0^{2\pi a} y\,dx$ integralini hesaplayınız.

Cevap : $3\pi a^2$

58. $y^2 = x^3$ eğrisi ile $x = 5$ doğrusunun sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $20\sqrt{5}$

59 $y = \sin x$ eğrisinin $x=0$ dan $x = \pi$ ye kadar olan kısmının ox ekseni ile sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : 2

60. r yarıçaplı bir dairenin alanını integral hesap yardımı ile hesaplayınız.

61. $x^2 = 4y$ ve $x^2 = 8 - 2y$ parabollerinin sınırladığı alanı hesaplayınız

Cevap : $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

62. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $\frac{3\pi a b}{4}$

63. $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ eğrisinin asimptodu ile sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $4\pi a^2$

64. Parametrik denklemleri $x = 3 + \cos\theta$; $y = 4\sin\theta$ olan eğrinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : 4π

65. $y(x^2 + 4) = 4(2 - x)$ eğrisinin ox ve oy eksenleri ile sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $\pi - 2\log 2$

66. $y^2(x^2 + a^2) = a^2 x^2$ eğrisinin asimptodları ile sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $4a^2$

67. $(y - 1)^2 = (x - 1)^2(4 - x)$ eğrisinin halkasının sınırladığı alanı hesaplayınız

Cevap : $\frac{24}{5}\sqrt{3}$

68. $y^2 = \dfrac{x^2(a+x)}{a-x}$ eğrisinin halkasının sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{1}{2}(4-\pi)a^2$

69. $r = a \sin 2\theta$ eğrisinin bir halkasının sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{\pi a^2}{8}$

70. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : a^2

71. $r = a(2 + \cos\theta)$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{9\pi a^2}{2}$

72. $r = 4\cos\theta$ dairesinin içinde ve $r = 2$ dairesinin dışında kalan alanı belirtiniz.

Cevap : $\dfrac{2(2\pi + 3\sqrt{3})}{3}$

73. $r = 2 + 2\cos\theta$ eğrisinin içinde ve $r = 1$ eğrisinin dışında kalan alanı hesaplayınız.

74. $r = \sqrt{2\cos\theta}$ eğrisinin içinde ve $r = 2(1-\cos\theta)$ eğrisinin dışında kalan alanı hesaplayınız.

75. Taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir dik koninin hacım formülünü bulunuz.

76. r yarıçaplı bir kürenin hacim formülünü bulunuz.

77. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisinin ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen hacmı hesaplavınız.

Cevap : $\dfrac{32\pi a^3}{105}$

78. $y^2 = x^3$ eğrisinin $(0, 0)$ noktası ile $x = \dfrac{7}{3}$ apsisli noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{26}{3}$

79. Dairenin çevresini veren $2\pi r$ formülünü çıkarınız.

80. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ parametrik denklemleriyle verilmiş sikloid eğrisinin bir kemerinin uzunluğunu hesaplayınız.

Cevap : $8a$

81. $x = e^{\theta} \sin \theta$, $y = e^{\theta} \cos \theta$ eğrisinin $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ ye karşılık olan noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu hesaplayınız.

Cevap : $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$

62. Kutupsal denklemi $r = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$ olan eğrinin θ nın 0 ile $\frac{\pi}{2}$ değerlerine karşılık olan noktaları arasında kalan kısmının uzunluğunu hesaplayınız.

Cevap : $a[\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)]$

83. $r = 2(1 - \cos \theta)$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.

Cevap : 16

84. $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ eğrisinin ox ekseni etrafında dönmesinden meydana gelen yüzeyin alanını hesaplayınız.

Cevap : $2\pi b \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$

1. *$p > 0$ bir sayı olduğuna göre:*

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

serisinin karakterini integral testi yardımiyle belirtiniz.

$u_n = f(n) = \frac{1}{n^p}$ olup n in bütün pozitif değerleri için pozitif ve azalan bir fonksiyondur. Buna göre:

$$\int_1^\infty \frac{dn}{n^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dn}{n^p} = \lim_{A\to\infty} \left| \frac{n^{1-p}}{1-p} \right|_1^A = \frac{1}{1-p} \operatorname{Lim}_{A\to\infty} (A^{1-p} - 1)$$

$(p \neq 1)$ bulunur.

$p > 1$ ise $1 - p$ negatif ve A^{1-p} sıfıra yaklaşarak integral $\frac{1}{p-1}$ gibi sonlu bir limit değerini alır. Buna göre integral mevcut olup seri yakınsaktır.

$p < 1$ ise $1 - p$ pozitif ve A^{1-p} sonsuza yaklaşarak integral mevcut olmaz ve seri ıraksaktır.

$p = 1$ ise seri:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

şeklini alır ki bu seriye harmonik seri denir. Bu ise

$$\int_1^\infty \frac{dn}{n} = \operatorname{Lim}_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dn}{n} = \operatorname{Lim}_{A\to\infty} (\log A)$$

olarak ıraksaktır.

Bunlara göre p. serisi adı verilen yukarıdaki seri $p > 1$ ise yakınsak ve $p \leqslant 1$ ise ıraksaktır.

2. *Genel terimi* $u_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{3n}$ *olan seriyi yazınız ve integral testi yardımiyle bu serinin karakterini belirtiniz.*

Seri :

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{3} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} + \frac{1}{9} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{3n} + \dots$$

dir.

$$f(n) = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{3n}, \quad n>0$$

olup n nin bu ifadeyi sürekli kıldığı değerler $\frac{7\pi}{3n} < \frac{\pi}{2}$ yani $n > \frac{14}{3}$ değerleridir. Buna göre $n \geqslant 5$ kabul edilerek :

$$\int_5^\infty \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{3n}\, dn = -\frac{3}{7\pi} \lim_{A\to\infty} \int_5^\infty \operatorname{tg} \frac{7\pi}{3n} \left(-\frac{7\pi}{3n^2} dn\right)$$

$$= -\frac{3}{7\pi} \lim_{A\to\infty} \left| \log\left(\sec \frac{7\pi}{3n}\right) \right|_5^A$$

$$= \frac{3}{7\pi} \log\left(\sec \frac{7\pi}{15}\right)$$

bulunur; Bu ise integralin mevcut olduğunu gösterir ve buna göre seri yakınsaktır.

3. *Genel terimi* $u_n = \frac{n}{(n^2+4)^2}$ *olan serinin karakterini integral testi yardımiyle belirtiniz.*

$$\int_1^\infty f(n)\, dn = \int_1^\infty \frac{n\, dn}{(n^2+4)^2} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{n\, dn}{(n^2+4)^2}$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2+4} \right|_1^A$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{A^2+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{10}$$

olarak integral mevcuttur ve seri yakınsaktır.

4. $\frac{50}{1.2} + \frac{50}{2.3} + \frac{50}{3.4} + \frac{50}{4.5} + \ldots$ *serisinin karakterini integral testi yardımiyle belirtiniz.*

$$u_n = \frac{50}{n(n+1)} \quad \text{olarak} \quad \int_1^{\infty} \frac{50}{n(n+1)}\, dn = 50 \log 2$$

bulunur. Bu ise serinin yakınsak olduğunu gösterir.

5. $\sin \pi + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{16} \sin \frac{\pi}{4} + \ldots$ *serisinin karakterini integral testi yardımiyle belirtiniz.*

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}$$

olup:

$$\int_1 f(n)\, dn = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}\, dn$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{A\to\infty} \left| \cos \frac{\pi}{n} \right|_1^A$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{A\to\infty} \left(\cos \frac{\pi}{A} + 1 \right) = \frac{2}{\pi}$$

olarak integral mevcuttur. Buna göre seri yakınsaktır.

6. $2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \ldots$ *serisinin karakterini mukayese testi yardımiyle belirtiniz.*

Mukayese serisi olarak $\frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$ genel terimli p serisini alalım. $p = 2$ olduğuna göre bu seri yakınsaktır; Diğer taraftan verilen serinin genel terimi:

$$u_n = \frac{n+1}{n^3}$$

olup

$$u_n = \frac{n+1}{n^3} \leqslant \frac{2n}{n^3}$$

dir. Buna göre verilen serinin herbir terimi ele aldığımız p serisindeki karşılığı olan terimden daha küçüktür. p serisi yakınsak olduğuna göre u_n serisi de yakınsaktır.

7. $\frac{1}{1+3^2}+\frac{1}{1+4^2}+\frac{1}{1+5^2}+\frac{1}{1+6^2}+\dots$ *serisinin karakterini belirtiniz.*

Serinin genel terimi $\frac{1}{1+n^2}$ olup bu seriyi $p=2$ olan p serisi ile mukayese edelim.

$$u_n=\frac{1}{1+n^2}<\frac{1}{n^2}$$

olarak verilen serininin herbir terimi p serisindeki karşılığı olan terimden daha küçüktür ; $p=2$ olan p serisi yakınsak olduğuna göre verilen seri de yakınsaktır.

8. *Genel terimi* $u_n=\frac{1}{(2n+1)^4}$ *olan serinin karakterini mukayese testi ile belirtiniz.*

Bu seriyi $p=4$ olan p serisi ile mukayese edelim ;

$$u_n=\frac{1}{(2n+1)^4}<\frac{1}{n^4}$$

olarak $p=4$ olan p serisi yakınsak olduğundan u_n serisi de yakınsaktır.

9. $1+\frac{1.2}{1.3}+\frac{1.2.3}{1.3.5}+\frac{1.2.3.4}{1.3.5.7}+\dots$ *serisinin karakterini belirtiniz.*

$$u_n=\frac{n!}{1.3.5\dots(2n-1)}$$

olup :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!}{1.3.5\dots(2n+1)}\,\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{n!}=\frac{n+1}{2n+1}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

olarak seri yakınsaktır.

10. *Genel terimi* $v_n = \frac{n^2}{n!}$ *olan serinin karakterini belirtiniz.*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} : \frac{n^2}{n!} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

olup seri yakınsaktır.

11. *Genel terimi* $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *olan serinin karakterini belirtiniz.*

$v_n = \frac{1}{n^3}$ serisini göz önüne alalım.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^3}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n(n+1)(n+2)} = 1 \neq 0$$

olup u_n ve v_n serileri ayni karakterdedir. Halbuki $v_n = \frac{1}{n^3}$ serisi $p = 3$ olan bir p serisi olduğundan yakınsaktır. Buna göre u_n serisi de yakınsaktır.

12. $\frac{1}{1^{3/2}+1} + \frac{1}{2^{3/2}+1} + \frac{1}{3^{3/2}+1} + ..$ *serisinin karakterini belirtiniz.*

Serinin genel terimi $u_n = \frac{1}{n^{3/2}+1}$ olup bu seri genel terimi $v_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ olan seri ile mukayese edilirse her n için $u_n < v_n$ olduğu görülür. Halbuki v_n , $p > 1$ halindeki p serisi olup yakınsaktır. Buna göre u_n serisi de yakınsaktır.

13. *Genel terimi* $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt[3]{n^4+1}}$ *olan serinin karakterini belirtiniz.*

$$v_n = \frac{n.n^{1/2}}{n.n^{4/3}} = \frac{1}{n^{5/6}} \quad \text{kabul ederek :}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n\sqrt{n}}{(n-1)\sqrt[3]{n^4+1}} \cdot \frac{n\sqrt[3]{n^4}}{n\sqrt{n}} = \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^4}{n^4+1}} \quad \text{ve}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \sqrt[3]{\frac{n^4}{n^4+1}} = 1 \neq 0$$

bulunur. Buna göre u_n ve v_n serileri ayni karakterdedir. Halbuki $v_n = \dfrac{1}{n^{5/6}}$ serisi $p<1$ olan p serisi olup ıraksaktır. O halde u_n serisi de ıraksaktır.

14. *Genel terimi* $u_n = tg\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$ *olan serinin karakterini belirtiniz.*

$$v_n = \frac{\pi}{\sqrt{n}} \quad \text{kabul ederek :}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}} = 1 \neq 0$$

olup heriki seri ayni karakterdedir. Halbuki $v_n = \dfrac{\pi}{\sqrt{n}} = \dfrac{\pi}{n^{1/2}}$ serisi ıraksaktır. Buna göre u_n serisi de ıraksaktır.

15. *Genel terimi* $u_n = sin^3\dfrac{1}{n}$ *olan serinin karakterini belirtiniz.*

$$v_n = \frac{1}{n^3} \quad \text{kabul edilirse:}$$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sin^3\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^3}} = \left[\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}\right]^3 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}\right]^3 = 1 \neq 0$$

olarak her iki seri ayni karakterdedir. Halbuki $v_n = \frac{1}{n^3}$ serisi $p = 3$ olan bir p serisi olduğundan yakınsaktır. Buna göre u_n serisi de yakınsaktır.

16. *Genel terimi $u_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.*

$v_n = \frac{1}{n^2}$ kabul ederek :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right]^2$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi^2}{2} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right]^2 = \frac{\pi^2}{2} \neq 0$$

bulunur. O halde u_n ve v_n serileri ayni karakterdedir. Halbuki $v_n = \frac{1}{n^2}$ serisi $p = 2$ olan p serisi olup yakınsaktır. Buna göre u_n de yakınsaktır.

17. *Genel terimi $u_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.*

Birinci yol :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}}{\frac{\pi}{2^n} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \frac{\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}}{\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}} = \frac{1}{4} < 1$$

olarak seri yakınsaktır.

İkinci yol : $v_n = \frac{\pi}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{2^{2n}}$ kabul ederek :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{n} \frac{\pi}{2^n}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}} = 1 \neq 0$$

bulunur. Buna göre u_n ve v_n serileri ayni karakterdedir. Halbuki $v_n = \frac{\pi}{2^{2n}} = \frac{\pi}{4^n}$ serisi ortak çarpanı $\frac{1}{4}$ olan bir geometrik dizi olup yakınsaktır. O halde u_n serisi de yakınsaktır.

18. *Genel terimi* $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^5+3n^2+1}}$ *olan serinin karakterini belirtiniz.*

$v_n = \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ kabul ederek :

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n^5}{n^5+3n^2+1}} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \neq 0$$

olarak her iki seri ayni karakterdedir. Halbuki v_n serisi $p = \frac{3}{2}$ olan p serisi olup yakınsaktır. Buna göre u_n de yakınsaktır.

19. $\frac{1}{4.1} - \frac{1}{16.2} + \frac{1}{64.3} - \ldots$ *serisinin karakterini belirtiniz.*

Seri alternatif bir seri olup $|u_{n+1}| < |u_n|$ ve $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ olarak yakınsak bir seridir.

20. *Genel terimleri* $u_n = \frac{1}{n^2}$ *ve* $v_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$ *olan sonsuz seriler veriliyor.* u_n *serisinin toplamı* S *ve* v_n *serisinin toplamı* A *olduğuna göre :*

$$S - A = \frac{S}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

olup :

$$S - A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^2}\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot S$$

ve buradan :

$$S - A = \frac{S}{4}$$

bulunur.

Aşağıda genel terimleri verilmiş serileri yazınız ve integral veya mukayese testini uygulayarak bu serilerin karakterlerini belirtiniz.

21. $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ Cevap : Yakınsak

22. $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ Cevap : Yakınsak

23. $u_n = \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$ Cevap : Iraksak

24. $u_n = \frac{n-1}{n^3}$ Cevap : Yakınsak

25. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ Cevap : Iraksak

26. $u_n = \frac{1}{n+100}$ Cevap : Iraksak

27. $u_n = \frac{1}{n^2+2}$ Cevap: Yakınsak

28. $u_n = \frac{2n+5}{n^3}$ Cevap: Yakınsak

29. $u_n = \frac{\log n}{n}$ Cevap: Iraksak

30. $u_n = \frac{\log (n+1)}{(n+1)^2}$ Cevap: Yakınsak

31. $u_n = \frac{n}{e^n}$ Cevap: Yakınsak

32. $u_n = \frac{n+1}{n \cdot 2^n}$ Cevap: Yakınsak

33. $u_n = \frac{n}{2^n}$ Cevap: Yakınsak

34. $u_n = \frac{\log n}{n^2}$ Cevap: Yakınsak

35. $u_n = \frac{n^4}{n!}$ Cevap: Yakınsak

Aşağıda genel terimleri verilmiş serilerin karakterlerini belirtiniz. Seri yakınsak ise mutlak yakınsak veya şartlı yakınsak olduğunu açıklayınız.

36. $u_n = \frac{n!}{10^n}$ Cevap: Iraksak

37. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{10^n}$ Cevap: Iraksak

38. $u_n = n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ Cevap: Mutlak yakınsak

39. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ Cevap: Şartlı yakınsak

40. $u_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ Cevap: Mutlak yakınsak

41. $u_n = \frac{(-1)^n\, n^2}{2^n}$ Cevap: Mutlak yakınsak

42. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}\, (4/3)^n}{n^2}$ Cevap: Iraksak

43. $u_n = \frac{(-5)^{n-1}}{n \cdot n!}$ Cevap: Mutlak yakınsak

44. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}$ Cevap: Mutlak yakınsak

45. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n\sqrt{n}}$ Cevap: Şartlı yakınsak

46. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)}$ Cevap: Mutlak yakınsak

47. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n+1}$ Cevap: Iraksak

48. $u_n = \dfrac{(-1)^n (6n^2 - 9n + 4)}{n^3}$ Cevap: Şartlı yakınsak

49. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \log(n+1)}{n+1}$ Cevap: Şartlı yakınsak

50. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirtiniz.*

Serinin genel terimi: $u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ olup

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n-1}{2n+1} x^2 \right| = x^2$$

bulunur. Serinin yakınsak olabilmesi için $x^2 < 1$ olması gerekeceğinden yakınsaklık aralığı $-1 < x < +1$ dir. Ancak sınır değerlerinin aralığa dahil olup olmadıklarını incelemek gerekir.

$x = -1$ için seri:

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$$

şeklinde alternatif bir seri olarak $|u_{n+1}| < |u_n|$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ olduğundan yakınsaktır.

$x = +1$ için seri:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

şeklinde alternatif bir seri olup ayni sebepten yakınsaktır. Bunlara göre verilen serinin yakınsaklık aralığı:

$$-1 \leqslant x \leqslant +1$$

dir.

51. $\frac{1}{2}x - \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 - \ldots$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirtiniz.*

Serinin genel terimi : $u_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n} x^n$ olup

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2.4.6...2n.(2n+2)} \cdot \frac{2.4.6...2n}{1.3.5..(2n-1)} x\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+2} x\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n+2}\right| |x| = |x|$$

bulunur. Serinin yakınsak olabilmesi için $|x| < 1$ yani $-1 < x < +1$ olmalıdır.

Diğer taraftan :

$x = -1$ için seri ıraksak,

$x = +1$ için seri yakınsak

olduğundan serinin yakınsaklık aralığı :

$$-1 < x \leqslant +1$$

dir

52. $(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{1}{3}(x+2)^3 - \frac{1}{4}(x+2)^4 + \ldots$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirtiniz.*

Serinin genel terimi: $u_n = (-1)^{n+1}\frac{(x+2)^n}{n}$ olup

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left| -\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x+2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left| -\frac{n}{n+1}(x+2)\right| = |x+2|$$

dir. Serinin yakınsak olabilmesi için $|x+2| < 1$ yani $-1 < x+2 < +1$ veya $-3 < x < -1$ olmalıdır. Ancak sınır değerlerinin aralığa dahil olup olmadıklarını belirtmek üzere ayrıca inceleme yapmak gerekir.

$x = -3$ için seri:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$$

şeklinde bir harmonik seri olarak ıraksaktır.

$x = -1$ için seri:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

şeklinde genel terimi sıfıra yaklaşan ve herbir terimi kendinden evvelkinden, mutlak değer bakımından, daha küçük olan bir alternatif seri olup yakınsaktır.

Bunlara göre verilen serinin yakınsaklık aralığı:

$$-3 < x \leqslant -1$$

dir.

53. $$1 - \frac{x^2}{1} + \frac{1.3}{1.2}x^4 - \frac{1.3.5}{1.2.3}x^6 + \ldots +$$

$$(-1)^{n+1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{2n-2} + \ldots$$

serisinin yakınsaklık aralığını belirtiniz.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{1.3.5..(2n-3).(2n-1)}{1.2.3...(n-1).n}\cdot\frac{1.2.3..(n-1)}{1.3.5..(2n-3)}x^2\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2n-1}{n}\right| \mid x^2 \mid = 2 \mid x^2 \mid$$

olup serinin yakınsak olabilmesi için $2 \mid x^2 \mid < 1$ olmalıdır. Buradan ise $\mid x^2 \mid < \frac{1}{2}$ yani $\mid x \mid < \frac{1}{\sqrt{2}}$ veya $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\frac{1}{\sqrt{2}}$ elde edilir. Diğer taraftan $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ için seri:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3} + \ldots +$$

$$(-1)^{n+1}\frac{1.3.5..(2n-3)}{1.2.3..(n-1)}\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

şeklini alır ki bu da herbir terimi, mutlak değerce, kendinden evvel gelen terimden küçük olan ve genel terimi sıfır limitine

yaklaşan bir alternatif seri olarak yakınsaktır. Buna göre verilen serinin yakınsaklık aralığı:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

dir.

54. $(x-2)-\frac{1}{4}(x-2)^2+\frac{1}{9}(x-2)^3-\frac{1}{16}(x-2)^4+\ldots$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirtiniz.*

Serinin genel terimi $u_n=(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{n^2}$ olup:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2(x-2)\right| = |x-2|$$

dir. Serinin yakınsak olabilmesi için $|x-2|<1$ yani $-1<x-2<+1$ veya $1<x<3$ olmalıdır. Şimdi de aralığın sınır değerlerinin aralığa dahil olup olmadıklarını inceleyelim.

$x=1$ için seri:

$$-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$$

şeklinde bir seri olur ki bu da $p=2$ olan p serisi olup yakınsaktır.

$x=3$ için ise seri:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots.$$

şeklinde bir seri olur ki bu da yakınsak bir alternatif seridir. Bunlara göre verilen serinin yakınsaklık aralığı:

$$1 \leqslant x \leqslant 3$$

dür.

55. $1+\frac{x-2}{1}+\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(x-2)^3}{3}+\ldots.$ *serisinin yakınsaklık aralığını belirtiniz.*

Serinin genel terimi $u_n = \dfrac{(x-2)^n}{n}$ olup:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \, |x-2| = |x-2|$$

dir. Serinin yakınsak olabilmesi için $|x-2|<1$ yani $-1<x-2<+1$ veya $+1<x<+3$ olmalıdır. Şimdi de aralığın sınır değerleri için serinin karakterini belirtelim.

$x=1$ için seri : $\quad 1-\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots$

şeklinde bir alternatif seri olup yakınsaktır.

$x=3$ için ise seri: $\quad 1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots$

şeklinde bir harmonik seri olup ıraksaktır. Bunlara göre verilen serinin yakınsaklık aralığı:

$$1 \leqslant x < 3$$

dür.

Aşağıda genel terimleri verilmiş kuvvet serilerinin yakınsaklık aralıklarını belirtiniz.

56. $u_n = x^n$ — Cevap : $-1<x<+1$

57. $u_n = (2x)^n$ — Cevap : $-\frac{1}{2}<x<+\frac{1}{2}$

58. $u_n = \dfrac{(x-1)^n}{2^n . n^3}$ — Cevap : $-2 \leqslant x-1 \leqslant +2$

59. $u_n = \dfrac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ — Cevap : $-1 \leqslant x+2 < +1$

60. $u_n = \dfrac{x^n}{(2n)!}$ — Cevap : $-\infty < x < +\infty$

61. $u_n = \dfrac{(-1)^n(3/2)^n\, x^n}{n+1}$ — Cevap : $-\frac{2}{3}<x\leqslant+\frac{2}{3}$

62. $u_n = n^2(x-1)^n$ — Cevap : $-1<x-1<+1$

63. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(x+4)^n}{3^n . n^2}$ — Cevap : $-3\leqslant x+4\leqslant+3$

64. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}{2^n(2n)!}$ — Cevap : $-8<x-2<+8$

65. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\, n!\, (3/2)^n x^n}{1.3.5..(2n-1)}$ Cevap : $-\frac{4}{3} < x < +\frac{4}{3}$

66. $u_n = \dfrac{(n-2)\, x^n}{n^2}$ Cevap : $-1 \leqslant x < +1$

67. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}\, x^n}{(n+1)\log(n+1)}$ Cevap : $-1 < x \leqslant +1$

68. $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(\log n) 2^n . x^n}{3^n . n^2}$ Cevap : $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{3}{2}$

69. *$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ fonksiyonunu seriye açınız.*

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad f'''(0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$

olarak :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

den :

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

bulunur.

70. *$y = \text{Arcsin}\, x$ fonksiyonunu seriye açınız.*

$$f(x) = \text{Arcsin}\, x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-1/2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = x(1 - x^2)^{-3/2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = (1 - x^2)^{-3/2} + 3x^2(1 - x^2)^{-5/2} \qquad f'''(0) = 1$$

$$f^{IV}(x) = 9x(1 - x^2)^{-5/2} + 15x^3(1 - x^2)^{-7/2} \qquad f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(x) = 9(1 - x^2)^{-5/2} + 90\, x^2(1 - x^2)^{-7/2} + 105x^4(1 - x^2)^{-9/2} \qquad f^{V}(0) = 9$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots$$

olup Mac-Laurin serisinde yerlerine konursa:

$$\text{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} +$$

$$\ldots + \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-3)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

bulunur.

71. *$y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ fonksiyonunu seriye açınız.*

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (1+x^2)^{-1/2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -x(1+x^2)^{-3/2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -(1+x^2)^{-3/2} + 3x^2(1+x^2)^{-5/2} \qquad f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = 9x(1+x^2)^{-5/2} - 15x^3(1+x^2)^{-7/2} \qquad f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(x) = 9(1+x^2)^{-5/2} - 90x^2(1+x^2)^{-7/2}$$

$$+ 105x^4(1+x^2)^{-9/2} \qquad f^{V}(0) = 9$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

olarak:

$$y = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{9x^5}{5!} - \ldots$$

$$y = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

bulunur.

72. *$y = \frac{1}{ch\,x}$ fonksiyonunun seriye açılımının ilk üç terimini belirtiniz.*

$$f(x) = \frac{1}{\text{ch}\, x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}^2 x} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{\text{sh}^2 x - 1}{\text{ch}^3 x} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{5\,\text{sh}\,x - \text{sh}^3x}{\text{ch}^4x} \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = \frac{5 - 18\,\text{sh}^2x + \text{sh}^4x}{\text{ch}^5x} \qquad f^{IV}(0) = 5$$

olarak :

$$\frac{1}{\text{ch}\,x} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \ldots$$

bulunur.

73. *$y = x\,e^{-x}$ fonksiyonunu seriye açınız.*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

ve

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots$$

olup :

$$y = x\,e^{-x} = x - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!} + \ldots$$

bulunur.

74. *$f(x) = e^x \sin x$ fonksiyonunu seriye açınız.*

$$f(x) = e^x \sin x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2e^x \cos x \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{IV}(x) = -4\,e^x \sin x = -4f(x) \qquad f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(x) = -4f'(x) \qquad f^{V}(0) = -4$$

$$f^{VI}(x) = -4f''(x) \qquad f^{VI}(0) = -8$$

$$f^{VII}(x) = -4f'''(x) \qquad f^{VII}(0) = -8$$

$$f^{VIII}(x) = -4f^{IV}(x) \qquad f^{VIII}(0) = 0$$

. . . .

olarak :

$$e^x \sin x = \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} - \frac{8x^6}{6!} - \frac{8x^7}{7!} + \frac{16x^9}{9!} + \dots$$

dir.

Aşağıdaki serilerin, hizalarında belirtilen aralıklarda, verilen fonksiyonların açılımları olduklarını gösteriniz.

75. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ (x in her değeri için)

76. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ (x in her değeri için)

77. $a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} \log^2 a + \frac{x^3}{3!} \log^3 a + .$ (x in her değeri için)

78. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ (x in her değeri için)

79. $\sin ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \dots$ (x in her değeri için)

80. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ $\quad -1 < x \leqslant +1$

81. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$ $\quad -1 \leqslant x < +1$

82. $(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} x^2 + \dots \quad (a>0)$ $\quad -a < x < +a$

83. $\text{Arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ $\quad -1 \leqslant x \leqslant +1$

84. $\sin^2 x = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \dots$ (x in her değeri için)

85. $\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$ $\quad 0 < x \leqslant 2$

86. $\sin x = \sin a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \dots$ (x in her değeri için)

87. $e^{x+h} = e^x \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots\right)$ (h ın her değeri için)

88. *$\sqrt[3]{7}$ yi dört ondalık doğru olarak hesaplayınız.*

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$$+ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_1)$$

formülünde $f(x) = x^{1/3}$, $a = 8$, $b = 7$ ve $b - a = -1$ olarak:

$$f(x) = x^{1/3} \quad , \quad f(a) = 2 \qquad = \quad 2{,}0000\ 00$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{-2/3} \quad , \quad f'(a)\,\frac{b-a}{1!} = -\frac{1}{12} \qquad = -0{,}0833\ 33$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\, x^{-5/3}, \quad f''(a)\,\frac{(b-a)^2}{2!} = -\frac{1}{9 \,.\, 2^5} \qquad = -0{,}0034\ 72$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}\, x^{-8/3} \quad , \quad f'''(a)\,\frac{(b-a)^3}{3!} = -\frac{5}{81 \,.\, 2^8} \qquad = -0{,}0002\ 41$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{80}{81} x^{-11/3}, \quad f^{IV}(a)\,\frac{(b-a)^4}{4!} = -\frac{5}{243 . 2^{10}} \qquad = -0{,}0000\ 20$$

elde edilir. Diğer taraftan:

$$f^{V}(x_1) = \frac{880}{243} x_1^{-14/3} = \frac{880}{243}\frac{x_1^{1/3}}{x_1^5}$$

ve $\qquad 7 < x_1 < 8$, $x_1^{1/3} < 2$, $x_1^5 > 7^5 = 49 \times 343$

olup:

$$0 < \frac{f^{V}(x_1)}{5!} < \frac{880 \,.\, 2}{243 \,.\, 49 \,.\, 343 . 120} < \frac{1}{250000} = 0{,}000004$$

ve $(b-a)^5 = -1$ olarak:

$$-0{,}000004 < R_4 < 0$$

dır. Buna göre $\sqrt[3]{7}$ yukarıki değerlerden:

$$\sqrt[3]{7} = 1{,}9129$$

olarak bulunur.

89. *$e^{1/3}$ ün hesabı için e^x serisinin ilk beş terimi kullanılmış olsa yapılan hata ne olur?*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

olup hata:

$$R = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \qquad (0<\theta<1)$$

dir. Bizim problemimizde $n=4$ ve $x = \frac{1}{3}$ olduğuna göre:

$$R = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5!} e^{\theta x} = \frac{1}{29160} e^{\theta x}$$

dir. $0<\theta<1$ olup θx in en büyük değeri θ nın $\theta = 1$ değerine karşılık olanıdır; Buna göre:

$$R < \frac{1}{29160} e^{1/3} < \frac{3^{1/3}}{29160}$$

$$R < 0{,}00005$$

bulunur.

90. *x i hangi değerler arasında seçmelidir ki cos x yerine* $1 - \frac{1}{2}x^2$ *alındığı zaman yapılan hata 0,0005 den küçük olsun?*

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{24} f^{IV}(\theta x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{24}\cos\theta x$$

olup :

$$|R| = \left|\frac{x^4}{24}\cos\theta x\right| < \left|\frac{x^4}{24}\right| < 0{,}0005$$

$$\left|\frac{x^4}{24}\right| < 0{,}0005$$

$$|x^4| < 0{,}012 = \frac{120}{10000}$$

$$|x| < \frac{\sqrt[4]{120}}{10}$$

$$|x| < 0{,}33 \quad \text{radyan}$$

$$|x| < 18°57'$$

olmalıdır.

91. $\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx$ *integralinin değerini seriler yardımiyle üç ondalığı doğru olarak hesaplayınız.*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

$$1 - e^{-x^2} = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + \dots$$

$$\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \frac{x^6}{4!} + \frac{x^8}{5!} - \dots$$

$$\int \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\,dx = x - \frac{x^3}{3.2!} + \frac{x^5}{5.3!} - \frac{x^7}{7.4!} + \frac{x^9}{9.5!} - \dots$$

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3!} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4!} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5!} - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{30} - \frac{1}{168} + \frac{1}{1080} - \dots$$

$$\cong 1 - 0{,}166\,66 + 0{,}033\,33 - 0{,}005\,95 + 0{,}000\,92$$

$$\cong 0{,}861\,64$$

olup üç ondalığa kadar doğru sonuç 0,861 dir.

92. $e^{-0,2}$ yi beş ondalık doğru olarak hesaplayınız. Cevap: 0,81873

93. $e^{0,2}$ yi beş ondalık doğru olarak hesaplayınız. Cevap: 1,22140

94. $\cos 0{,}5$ i beş ondalık doğru olarak hesaplayınız. Cevap: 0,87758

95. $(0{,}91)^{1/3}$ ü beş ondalık doğru olarak hesaplayınız. Cevap: 0,96905

96. $\sin 2°$ yi dört ondalık doğru olarak hesaplayınız. Cevap: 0,0349

97. $\sin 48°$ yi dört ondalık doğru olarak hesaplayınız. Cevap: 0.7431

98. $\int_0^{0,4} e^{-x^2}\,dx$ integralini dört ondalık doğru olarak hesaplayınız.

Cevap: 0,3797

99. *Peryodu 2π olan $f(x)=x$ fonksiyonunu $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$ aralığında fourier serisine açınız.*

Fonksiyonun eğrisi şekil 110 da gösterilmiş olup :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{+\pi} = 0 \;;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\left| x\sin x\right|_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx\,dx = 0\;;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\left| x\cos nx\right|_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx$$

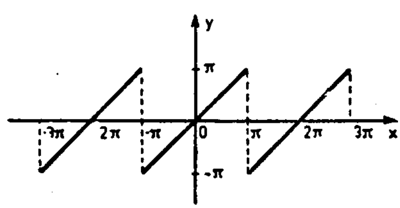
$$= -\frac{1}{n\pi}\Big[\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)\Big]$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

ve n çift ise $\cos n\pi = +1$: n tek ise $\cos n\pi = -1$ olarak :

$$f(x) = 2\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \dots\right]$$

bulunur. Fonksiyon tek fonksiyon olup a_0 ve a_n lerin, daha evvel, sıfır oldukları söylenebilirdi.



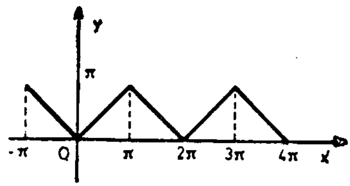
Şekil 110

100. *$(-\pi, 0)$ aralığında $f(x) = -x$ ve $(0, \pi)$ aralığında $f(x) = x$ olan peryodik $f(x)$ fonksiyonunu fourier serisine açınız.*

Fonksiyonun eğrisi şekil 111 de gösterilmiştir : Fonksiyon çift fonksiyon olup b_n ler sıfıra eşittir.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,:$$

$$\pi\, a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$



Şekil 111

$$= 2\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= 2\left|\frac{1}{n}x\sin nx\right|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

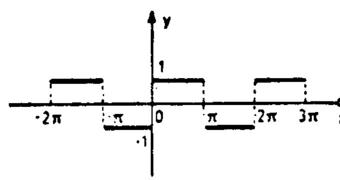
$$= -\frac{2}{n^2}(1-\cos n\pi)$$

ve n çift ise $a_n = 0$, n tek ise $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$ olarak:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\ldots\right]$$

bulunur.

101. *$(-\pi, +\pi)$ aralığındaki bütün x değerleri için $(-\pi, 0)$ aralığında $f(x) = -1$ ve $(0, \pi)$ aralığında $f(x) = 1$ olan $f(x)$ fonksiyonunu fourier serisine açınız.*



Şekil 112

Fonksiyonun eğrisi şekil 112 de gösterilmiştir. Fonksiyon tek fonksiyon olup a_0 ve a_n ler sıfıra eşittir.

$$\pi\, b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx = 2\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}(1-\cos n\pi)$$

ve n çift ise $b_n = 0$, n tek ise $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$ olarak:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right)$$

bulunur.

102. *2π peryodlu $f(x) = \pi^2 - x^2$ fonksiyonunu $(-\pi, \pi)$ aralığında fourier serisine açınız.*

Fonksiyon çift fonksiyon olup $b_n = 0$ dır.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\,\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right|_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2\,\pi^2}{3}\,;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - x^2)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi^2\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$$

$$= 2\pi\left|\,\frac{1}{n}\sin nx\right|_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx\,;$$

$$\int x^2\cos nx\,dx = \frac{x^2}{n}\sin nx - \frac{2}{n}\int x\sin nx\,dx\,;$$

$$\int x\sin nx\,dx = -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n}\int \cos nx\,dx\,;$$

$$= -\frac{x}{n}\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\,;$$

$$\int x^2\cos nx\,dx = \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\,;$$

$$a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left|\,\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right|_0^\pi$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right) = -\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

olarak :

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \frac{4}{1^2}\cos x - \frac{4}{2^2}\cos 2x + \frac{4}{3^2}\cos 3x - \ldots$$

bulunur.

103. *2π peryodlu $f(x) = \frac{x^2}{4}$ fonksiyonunu $(-\pi, +\pi)$ aralığında fourier serisine açınız.*

Fonksiyon çift fonksiyon olup $b_n = 0$ dır.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{x^3}{12}\right|_0^\pi = \frac{\pi^2}{12};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^2}{4}\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$$

ve

$$\int x^2\cos nx\,dx = \frac{x^2}{n}\sin nx - \frac{2}{n}\int x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^2}\int\cos nx\,dx$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx$$

olup :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right) = \frac{1}{n^2}\cos n\pi$$

ve n çift ise $a_n = \frac{1}{n^2}$; n tek ise $a_n = -\frac{1}{n^2}$ olarak:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\ldots$$

bulunur.

104. *2π peryodlu $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunu $(-\pi, +\pi)$ aralığında fourier serisine açınız.*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{1}{2}e^{2x}\right|_{-\pi}^{+\pi} = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2x}\cos nx\,dx \quad \text{olup:}$$

$$\int e^{2x}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}e^{2x}\sin nx - \frac{2}{n}\int e^{2x}\sin nx\,dx$$

ve:

$$\int e^{2x}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}e^{2x}\cos nx + \frac{2}{n}\int e^{2x}\cos nx\,dx$$

$$\int e^{2x}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}e^{2x}\sin nx + \frac{2}{n^2}e^{2x}\cos nx - \frac{4}{n^2}\int e^{2x}\cos nx\,dx$$

$$\frac{n^2+4}{n^2}\int e^{2x}\cos nx\,dx = e^{2x}\left(\frac{1}{n}\sin nx + \frac{2}{n^2}\cos nx\right)$$

olup:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2x}\cos nx\,dx = \left|\frac{n^2 e^{2x}}{\pi(n^2+4)}\left(\frac{1}{n}\sin nx + \frac{2}{n^2}\cos nx\right)\right|_{-\pi}^{+\pi}$$

$$= \frac{n^2}{\pi(n^2+4)}\left\{e^{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin n\pi + \frac{2}{n^2}\cos n\pi\right] - e^{-2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(-n\pi) + \frac{2}{n^2}\cos(-n\pi)\right]\right\}$$

$$= \frac{n^2}{\pi(n^2+4)}\left[\frac{2}{n^2}e^{2\pi}\cos n\pi - \frac{2}{n^2}e^{-2\pi}\cos n\pi\right]$$

$$= \frac{2}{\pi(n^2+4)}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})\cos n\pi$$

dir.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2x}\sin nx\,dx \quad \text{olup:}$$

$$\int e^{2x}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}e^{2x}\cos nx + \frac{2}{n}\int e^{2x}\cos nx\,dx$$

$$\int e^{2x}\cos nx\,dx = \frac{1}{n}e^{2x}\sin nx - \frac{2}{n}\int e^{2x}\sin nx\,dx$$

$$\int e^{2x}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}e^{2x}\cos nx + \frac{2}{n^2}e^{2x}\sin nx - \frac{4}{n^2}\int e^{2x}\sin nx\,dx$$

$$\frac{n^2+4}{n^2}\int e^{2x}\sin nx\,dx = \frac{2}{n^2}e^{2x}\sin nx - \frac{1}{n}e^{2x}\cos nx \qquad \text{ve}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2x}\sin nx\,dx = \frac{n^2}{\pi(n^2+4)}\left|\frac{2}{n^2}e^{2x}\sin nx - \frac{1}{n}e^{2x}\cos nx\right|_{-\pi}^{+\pi}$$

$$= \frac{n}{\pi(n^2+4)}(e^{-2\pi} - e^{2\pi})\cos n\pi = -\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\frac{n}{n^2+4}\cos n\pi$$

olarak :

$$f(x) = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{4\pi} - \frac{2(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2+4} - \frac{\cos 2x}{2^2+4} + \frac{\cos 3x}{3^2+4} - \dots\right]$$
$$+ \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^2+4} - \frac{2\sin 2x}{2^2+4} + \frac{3\sin 3x}{3^2+4} - \dots\right]$$

bulunur.

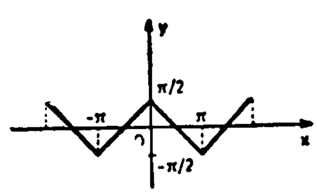
105. *$0 \leqslant x \leqslant \pi$ için $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ ve $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ için $f(x) = \frac{\pi}{2} + x$ olan 2π peryodlu $f(x)$ fonksiyonunu fourier serisine açınız.*

Fonksiyonun eğrisi şekil 113 de gösterilmiştir. Fonksiyon çift fonksiyon olup $b_n = 0$ dır.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right|_0^\pi = 0\,;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx$$

$$= \int_0^\pi \cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx$$



Şekil 113

$$= \left| \frac{\sin nx}{n} \right|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n^2} (1 - \cos n\pi)$$

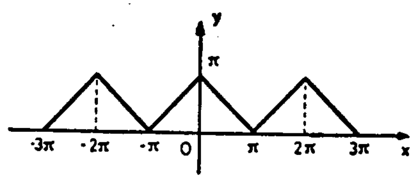
ve n çift ise $a_n = 0$, n tek ise $a_n = \frac{4}{\pi n^2}$ olarak:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$$

bulunur.

106. *$-\pi < x < 0$ aralığında $f(x) = \pi + x$ ve $0 < x < \pi$ aralığında $f(x) = \pi - x$ olan $f(x)$ fonksiyonunu $(-\pi, \pi)$ aralığında fourier serisine açınız.*

Fonksiyonun eğrisi şekil 114 de gösterilmiştir.



Şekil 114

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (\pi + x) \, dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \, dx \right] = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (\pi + x) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} (1 - \cos n\pi);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (\pi + x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \right] = 0$$

olarak:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

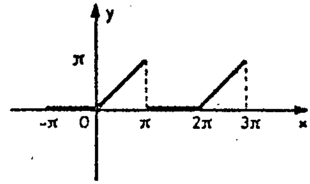
bulunur.

107. *$(-\pi, 0)$ aralığında $f(x) = 0$ ve $(0, \pi)$ aralığında $f(x) = x$ olan peryodik $f(x)$ fonksiyonunu $(-\pi, +\pi)$ aralığında fourier serisine açınız.*

Fonksiyonun gösterdiği eğri şekil 115 de gösterilmiştir.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}\ ;$$



Şekil 115

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left|\frac{1}{n}x\sin nx\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left|-\frac{1}{n}\cos nx\right|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$$

ve n çift ise $a_n = 0$, n tek ise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}$ dir. Diğer taraftan:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

olarak:

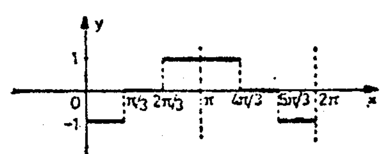
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x\right) - \frac{\sin 2x}{2}$$

$$+ \left(-\frac{2}{\pi.3^2}\cos 3x + \frac{\sin 3x}{3}\right) + \ldots$$

bulunur.

108. *Eğrisi şekil 116 da gösterilen fonksiyonu fourier serisine açınız.*

Fonksiyon çift fonksiyon olup $b_n = 0$ dır;



Şekil 116

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi/3} - dx + \int_{2\pi/3}^{\pi} dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\Big|-x\Big|_0^{\pi/3} + \Big|x\Big|_{2\pi/3}^{\pi}\right] = 0;$$

ve

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/3} - \cos nx\, dx + \int_{2\pi/3}^{\pi} \cos nx\, dx\right.$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\Big|-\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi/3} + \Big|\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{2\pi/3}^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(\sin\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{2n\pi}{3}\right) = -\frac{4}{\pi n}\sin n\frac{\pi}{2}\cos n\frac{\pi}{6}$$

olup n çift ise $a_n = 0$, n tek ise :

$$a_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi.1}, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = +\frac{2\sqrt{3}}{\pi.5}, \ldots.$$

olarak :

$$f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{11}\cos 11x + \ldots\right.$$

bulunur.

109. 2π peryodlu $y = e^x$ fonksiyonunu $(-\pi, +\pi)$ aralığında fourier serisine açınız.

Cevap : $e^x = \dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi e^{\pi}}\left[\dfrac{1}{2} \mp \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx - n\sin x}{1+n^2}\right]$

110. $-\pi \leqslant x \leqslant 0$ için $f(x) = \dfrac{-x^2-\pi x}{2}$ ve $0 \leqslant x \leqslant \pi$ için $f(x) = \dfrac{x^2-\pi x}{2}$ olan $f(x)$ fonksiyonunu fourier serisine açınız.

Cevap : $f(x) = -\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin x}{1^3} + \dfrac{\sin 3x}{3^3} + \dfrac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$

111. $(-\pi, +\pi)$ aralığında $f(x) = \dfrac{\pi^2 x - x^3}{3}$ olan $f(x)$ fonksiyonunu fourier serisine açınız.

Cevap : $f(x) = 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n^3}$

112. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ aralığında $f(x) = x$ ve $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ aralığında $f(x) = 2\pi - x$ olan fonksiyonu fourier serisini açınız.

Cevap : $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right)$

13. KISMÎ TÜREVLER

1. $u = log \frac{x}{y}$ *için* $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ *olduğunu gösteriniz.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1/y}{x/y} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x/y^2}{x/y} = -\frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

olarak :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

dır.

2. $u = x^2 \, arctg \frac{y}{x} - y^2 \, arctg \frac{x}{y}$ *için* $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *olduğunu gösteriniz.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} - y$$

olup :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

dir.

3. $u = e^x \cos y$ *olduğuna göre* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *yi hesaplayınız.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

olup :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

bulunur.

4. $u = \sqrt{x^2 - y^2}\, Arcsin\, \frac{y}{x}$ *için* $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$ *olduğunu gösteriniz.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\text{Arcsin}\,\frac{y}{x} + \sqrt{x^2-y^2}\,\frac{-y/x^2}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\text{Arcsin}\,\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\text{Arcsin}\,\frac{y}{x} + \sqrt{x^2-y^2}\,\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\text{Arcsin}\,\frac{y}{x} + 1$$

olarak :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\text{Arcsin}\,\frac{y}{x} - y - \frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\,\text{Arcsin}\,\frac{y}{x} + y$$

$$= \sqrt{x^2-y^2}\,\text{Arcsin}\,\frac{y}{x} = u$$

bulunur.

5. $u = sin(x+y) + cos(x-y)$ *için* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$ *olduğunu gösteriniz.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x+y) - \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x+y) - \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\cos(x+y) + \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sin(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = -\cos(x+y) - \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} = \sin(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) + \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin(x+y) - \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -\cos(x+y) - \sin(x-y)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \sin(x+y) + \cos(x-y)$$

olarak :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \sin(x+y) + \cos(x-y) - 2\sin(x+y) - 2\cos(x-y) + \sin(x+y) + \cos(x-y) = 0$$

olduğu görülür.

6. $u = y^2 e^x + (x+y)e^{-x} + \frac{1}{2}\sin(x+2y) - x e^y$ *için :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = \cos(x+2y) + e^y$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 e^x + e^{-x} - (x+y)e^{-x} + \frac{1}{2}\cos(x+2y) - e^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 e^x - 2e^{-x} + (x+y)e^{-x} - \frac{1}{2}\sin(x+2y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y e^x + e^{-x} + \cos(x+2y) - x e^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y e^x - e^{-x} - \sin(x+2y) - e^y$$

olup :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} - u = y^2 e^x - 2e^{-x} + (x+y)\, e^{-x} - \frac{1}{2} \sin(x+2y)$$
$$- 2y\, e^x + e^{-x} + \sin(x+2y) + e^y + 2ye^x + e^{-x} + \cos(x+2y)$$
$$- x\, e^y - y^2 e^x - (x+y)\, e^{-x} - \frac{1}{2} \sin(x+2y) + x\, e^y$$
$$= \cos(x+2y) + e^y$$

bulunur.

7. $u = x^4 + sin(x+y) - y \log x$ *için :*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{1}{x^2}$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x+y) - \log x \; ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin(x+y) \; ;$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -\cos(x+y) \quad ; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = -\cos(x+y) \; ;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y) - \frac{1}{x} \; ; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -\cos(x+y) + \frac{1}{x^2}$$

olarak :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -\cos(x+y) + \frac{1}{x^2} + 2\cos(x+y)$$
$$- \cos(x+y)$$
$$= \frac{1}{x^2}$$

bulunur.

8. $u = e^{-x}[x^2 + 2x + 2y + 2\,tg\,(x+y)]$ *için :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + u = 2\,e^{-x}$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-x}[-x^2 - 2y - 2\,\mathrm{tg}(x+y) + 2 + 2\sec^2(x+y)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}[x^2 - 2x + 2y - 2 + 2\,\mathrm{tg}(x+y) - 4\sec^2(x+y)$$
$$+ 4\sec^2(x+y)\,\mathrm{tg}(x+y)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}[2 + 2\sec^2(x+y)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{-x}\sec^2(x+y)\,\mathrm{tg}(x+y)$$

olarak :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + u = 2e^{-x}$$

bulunur.

9. $u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ *ise* $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$ *olduğunu gösteriniz.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n\left(-\frac{y}{x^2}\right)f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= n\,x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - y\,x^{n-2} f'\left(\frac{y}{x}\right);$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^n\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) = x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

olarak :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nx^n f\left(\frac{y}{x}\right) - y\,x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right) + y\,x^{n-1}f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= nx^n f\left(\frac{y}{x}\right) = nu$$

bulunur.

10. $x = e^r\sin\theta$ *ve* $y = e^r\cos\theta$ *olduğuna göre* $\frac{\partial r}{\partial y}$ *ve* $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ *türevlerini hesaplayınız.*

$$\frac{x}{y} = \mathrm{tg}\,\theta \quad \text{ve} \quad \theta = \mathrm{Arctg}\,\frac{x}{y} \quad \text{olarak :}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

ve $x^2 + y^2 = e^{2r}$, $2r = \log(x^2+y^2)$ veya $r = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ olarak :

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

bulunur.

11. $u = x^2 + xy + y^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$ *olduğuna göre* $\frac{du}{dt}$ *yi hesaplayınız*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+y \;;\; \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y; \; \frac{dx}{dt} = \cos t\,, \; \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

olarak :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x+y)\cos t - (x+2y)\sin t$$
$$= (2\sin t + \cos t)\cos t - (\sin t + 2\cos t)\sin t$$
$$= \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t = y^2 - x^2$$

bulunur.

12. $u = \log(x^y y^x)$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$ *olduğuna göre* $\frac{du}{dt}$ *türevini ve bu türevin* $t = 1$ *için değerini hesaplayınız.*

$u = y\log x + x\log y$ yazılırsa $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x} + \log y$ ve

$\frac{\partial u}{\partial y} = \log x + \frac{x}{y}$ olarak :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y}{x} + \log y\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{x}{y} + \log x\right)\frac{dy}{dt}$$

ve $\frac{dx}{dt} = e^t$, $\frac{dy}{dt} = -e^{-t}$ değerleri yerlerine konursa :

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{y}{x} + \log y\right)e^t - \left(\frac{x}{y} + \log x\right)e^{-t}$$

bulunur. Burada da x ve y yerine t cinsinden değerleri yazılırsa:

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{e^{-t}}{e^t} + \log e^{-t}\right)e^t - \left(\frac{e^t}{e^{-t}} + \log e^t\right)e^{-t}$$
$$= e^{-t} - t\,e^t - e^t - t\,e^{-t}$$
$$= (1-t)\,e^{-t} - (1+t)\,e^t$$

ve $t = 1$ yapılırsa :

$$\frac{du}{dt} = -2e$$

bulunur.

13. $u = e^y \sin x$ *ve* $x = t^2$, $y = 3t$ *olduğuna göre* $\frac{d^2u}{dt^2}$ *yi hesaplayınız.*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

olup :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cos x\ ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \sin x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \sin x\ ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \sin x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = e^y \cos x\ ;$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t\ , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\ , \quad \frac{dy}{dt} = 3\ , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

değerleri yerlerine konursa:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -e^y \sin x \cdot 4t^2 + 2e^y \cos x \cdot 2t \cdot 3 + e^y \sin x \cdot 9 + e^y \cos x \cdot 2 + e^y \sin x \cdot 0$$

$$= (9 - 4t^2)\, e^y \sin x + (12t + 1)\, e^y \cos x$$

$$= (9 - 4x)\, e^y \sin x + (4y + 1)\, e^y \cos x$$

bulunur.

14. $u = z \sin \frac{y}{x}$, $x = 3r^2 + 2s$, $y = 4r - 2s^3$, $z = 2r^2 - 3s^2$ *olduğuna göre* $\frac{\partial u}{\partial r}$ *i hesaplayınız.*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{zy}{x^2}\cos\frac{y}{x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{x}\cos\frac{y}{x} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \sin\frac{y}{x} \; ;$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = 6r \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 4 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial r} = 4r$$

olarak :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{6rzy}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{4z}{x}\cos\frac{y}{x} + 4r\sin\frac{y}{x}$$

bulunur.

15. *$V = V(x,y)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ olduğuna göre:*

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi \;,\; \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \;,\; \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \;,\; \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$$

ve

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial V}{\partial y} r\cos\varphi$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi$$

olarak :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi\right)^2 + \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\cos^2\varphi + 2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\sin^2\varphi$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\sin^2\varphi - 2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\cos^2\varphi ,$$

$$= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$

bulunur.

16. $z = f(x, y)$, $x = e^v \sec u$, $y = e^v \operatorname{tg} u$ *olduğuna göre:*

$$\cos u\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right) = xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad \text{olup:}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

dir. Burada $\dfrac{\partial x}{\partial v} = e^v \sec u$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = e^v \operatorname{tg} u$, $\dfrac{\partial x}{\partial u} = e^v \sec u \operatorname{tg} u$,

$\dfrac{\partial y}{\partial u} = e^v \sec^2 u$ değerleri yerlerine konulursa:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^v \sec u \operatorname{tg} u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} e^v \sec^2 u\right)e^v \sec u + \frac{\partial f}{\partial x} e^v \sec u \operatorname{tg} u$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} e^v \sec u \operatorname{tg} u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^v \sec^2 u\right) e^v \operatorname{tg} u + \frac{\partial f}{\partial y} e^v \sec^2 u$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{2v} \sec^2 u \operatorname{tg} u + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} e^{2v} \sec^3 u + \frac{\partial f}{\partial x} e^v \sec u \operatorname{tg} u +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} e^{2v} \sec u \operatorname{tg}^2 u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{2v} \sec^2 u \operatorname{tg} u + \frac{\partial f}{\partial y} e^v \sec^2 u$$

bulunur. Diğer taraftan:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} e^v \sec u \operatorname{tg} u + \frac{\partial f}{\partial y} e^v \sec^2 u$$

olup:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{2v} \sec^2 u \operatorname{tg} u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} e^{2v} \sec^3 u +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} e^{2v} \sec u \operatorname{tg}^2 u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{2v} \sec^2 u \operatorname{tg} u$$

$$\cos u \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} e^{2v} \sec u \operatorname{tg} u + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} e^{2v} \sec^2 u +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} e^{2v} \operatorname{tg}^2 u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} e^{2v} \sec u \operatorname{tg} u$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} xy$$

$$= xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

bulunur.

17. *$x = 2r - s$ ve $y = r + 2s$ olduğuna göre $u = f(x,y)$ için $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ türevini veren ifadeyi bulunuz.*

$x = 2r - s$ ve $y = r + 2s$ ifadelerinin her iki tarafı x'e göre türetilirse:

$$1 = 2 \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \qquad \text{ve} \qquad 0 = \frac{\partial r}{\partial x} + 2 \frac{\partial s}{\partial x}$$

ve bunlardan da:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2}{5} \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{5}$$

elde edilir. Ayni ifadelerin her iki tarafı y ye göre türetilirse:

$$0 = 2 \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial y} \qquad \text{ve} \qquad 1 = \frac{\partial r}{\partial y} + 2 \frac{\partial s}{\partial y}$$

ve bunlardan da:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{5} \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{2}{5}$$

elde edilir. Bunlara göre:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{5} \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$= \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s}\right)\frac{1}{5} + \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)\frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{25}\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial r} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)$$

bulunur.

18. *$u = f(x,y)$, $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$ olduğuna göre $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial r}$-i veren bir formül çıkarınız.*

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{olup:}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial r} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial r} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial r} + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s\,\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial r}$$

bulunur.

19. *$V = V(x,y)$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ olduğuna göre:*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

denkleminin

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

şekline sokulabileceğini gösteriniz.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

olup $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ leri elde etmek üzere $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ifadeleri x e göre türetilirse:

$$1 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ ,\quad 0 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

elde edilerek bunlardan:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi\ ,\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

ve y ye göre türetilirse:

$$0 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}\ ,\quad 1 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ve bunlardan da:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi\ ,\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

bulunur. Bunlara göre:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\ ;\qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

olur. Bu ifadelerden de:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \left(\cos\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\sin\omega}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\varphi}\right)\cos\varphi +$$

$$\left(-\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\varphi} - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial^2\varphi}\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\varphi} +$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin^2\varphi\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\varphi} +$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

bulunarak:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

olduğu görülür.

20. *$u = e^{x \sin y}$ den du toplam diferansiyelini hesaplayınız.*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y\, e^{x \sin y} \;, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos y\, e^{x \sin y}$$

olarak :

$$du = \sin y\, e^{x \sin y}\, dx + \cos y\, e^{x \sin y}\, dy$$
$$= e^{x \sin y}\,(\sin y\, dx + x \cos y\, dy)$$

bulunur.

21. *$z = \sin^2 \log(xy^2)$ den dz toplam diferansielini hesaplayınız.*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \sin \log(xy^2).\cos \log(xy^2).\,\frac{y^2}{xy^2}$$
$$= \frac{2}{x} \sin \log(xy^2) \cos \log(xy^2)$$
$$= \frac{1}{x} \sin 2 \log(xy^2) = \frac{1}{x} \sin \log(x^2y^4) \;;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \sin \log(xy^2) \cos \log(xy^2)\,\frac{2xy}{xy^2}$$
$$= \frac{4}{y} \sin \log(xy^2) \cos \log(xy^2) = \frac{2}{y} \sin \log(x^2y^4)$$

olarak :

$$dz = \frac{1}{x} \sin \log(x^2y^4)\, dx + \frac{2}{y} \sin \log(x^2y^4)\, dy$$
$$= \left(\frac{dx}{x} + 2\,\frac{dy}{y}\right) \sin \log(x^2y^4)$$

bulunur.

22. $e^{y^2/2}\sin(x+y)\,dx + e^{y^2/2}[\sin(x+y) - y\cos(x+y)]\,dy$ *diferansielinin bir tam diferansiel olduğunu gösteriniz.*

M dx + N dy şeklindeki bir diferansielin tam diferansiel olabilmesi için gerek ve yeter şart:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olmasıdır. Buna göre:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = y\,e^{y^2/2}\sin(x+y) + e^{y^2/2}\cos(x+y)$$

ve

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{y^2/2}[\cos(x+y) + y\sin(x+y)]$$

olarak

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğu görülür.

23. $\log(x^2 - y^2) = \text{Arcsin}\,\frac{y}{x}$ *den* $\frac{dy}{dx}$ *türevini hesaplayınız.*

$$f(x,y) = \log(x^2 - y^2) - \text{Arcsin}\,\frac{y}{x} = 0$$

yazılarak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x^2 + y\sqrt{x^2 - y^2}}{x(x^2 - y^2)}\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(2y + \sqrt{x^2 - y^2})}{x^2 - y^2}$$

ve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'} = \frac{2x^2 + y\sqrt{x^2 - y^2}}{x(2y + \sqrt{x^2 - y^2})}$$

bulunur.

24. $x = c\,e^{y/x}$ *den* $\frac{dy}{dx}$ *türevini hesaplayınız.*

$$f(x,y) = x - c\,e^{y/x} = 0$$

dan: $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{cy}{x^2}e^{y/x}\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{c}{x}e^{y/x} \quad$ olup:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'} = \frac{1 + \frac{cy}{x^2}\, e^{y/x}}{-\frac{c}{x}\, e^{y/x}} = 1 + \frac{y}{x}$$

bulunur.

25. *$2 \log x + \left(\text{Arcsin}\ \frac{y}{x}\right)^2 = c$ den $\frac{dy}{dx}$ türevini hesaplayınız.*

$$f(x,y) = 2 \log x + \left(\text{Arcsin}\ \frac{y}{x}\right)^2 - c = 0$$

dan :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + \frac{-\frac{y}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot 2\,\text{Arcsin}\ \frac{y}{x}$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{2y}{x\sqrt{x^2 - y^2}}\ \text{Arcsin}\ \frac{y}{x} :$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,\text{Arcsin}\ \frac{y}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{2\,\text{Arcsin}\frac{y}{x}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

olup :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{\frac{2}{x} - \frac{2y\ \text{Arcsin}\ \frac{y}{x}}{x\sqrt{x^2-y^2}}}{\frac{2\ \text{Arcsin}\ \frac{y}{x}}{\sqrt{x^2-y^2}}}$$

$$= \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x\ \text{Arcsin}\ \frac{y}{x}}$$

bulunur.

26. *$3x\ \text{Arccos}\ y + 3y \log x = \pi$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ türevinin $x = 1$ ve $y = \frac{1}{2}$ için değerini hesaplayınız.*

dan:

$$f(x,y) = 3x \operatorname{Arccos} y + 3y \log x - \pi = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \operatorname{Arccos} y + \frac{3y}{x}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3x}{\sqrt{1-y^2}} + 3 \log x$$

olup:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Arccos} y + \dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}} - \log x}$$

bulunur. Bu ifadede $x = 1$ ve $y = \frac{1}{2}$ yapılırsa:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=1\\ y=1/2}} = \frac{\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \log 1} = \frac{\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{12}(2\pi + 3)$$

elde edilir.

27. $x^3+y^2+z^2-\log(yz^2)=c$ *den* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *ve* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *türevlerini hesaplayınız.*

dan:

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 - \log(yz^2) - c = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{1}{y}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - \frac{2}{z}$$

olup:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x'}{f_z'} = -\frac{3x^2}{2z - \dfrac{2}{z}} = \frac{3x^2 z}{2 - 2z^2}$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y'}{f_z'} = -\frac{2y - \dfrac{1}{y}}{2z - \dfrac{2}{z}} = -\frac{z(2y^2-1)}{y(2z^2-2)}$$

bulunur.

28. $\sqrt{1+(2{,}98)(5{,}03)}$ *ifadesinin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.*

$$f(x,y) = z = \sqrt{1+xy} \text{ , } x = 3 \text{ ve } y = 5 \text{ kabul edilirse:}$$

$$f(3,5) = z = \sqrt{1+3\times 5} = 4$$

bulunur. Aranılan değer ise:

$$f(2{,}98\,;5{,}03) = f(3\,;5) + \Delta z$$

$$\sqrt{1+(2{,}98)(5{,}03)} = 4 + \Delta z$$

olup $\Delta x = -0{,}02$ ve $\Delta y = 0{,}03$ olduğu da gözönünde tutularak:

$$\Delta z \cong dz = \frac{y\,\Delta x}{2\sqrt{1+xy}} + \frac{x\,\Delta y}{2\sqrt{1+xy}}$$

$$= \frac{5\cdot(-0{,}02)+3\cdot(+0{,}03)}{2.4}$$

$$= \frac{-0{,}10+0{,}09}{8} = -0{,}00125$$

ve

$$\sqrt{1+(2{,}98)(5{,}03)} \cong 4+\Delta z = 4-0{,}00125$$

$$\cong 3{,}99875$$

dir.

29. *Bir cismin ρ yoğunluğu bunun havadaki ağırlığı P_1, su içindeki ağırlığı da P_2 olmak üzere $\rho = \dfrac{P_1}{P_1-P_2}$ formülü ile hesaplanıyor. P_1, 0,01 kg ve P_2 de 0,02 kg lık birer hata ile $P_1 = 9$ kg, $P_2=5$ kg olarak ölçülüyorlar. ρ nun yukarıdaki formülle hesaplanan değerinde yapılan maksimum hatayı bulunuz.*

$$\rho = \frac{P_1}{P_1-P_2}$$

olup hata:

$$\Delta\rho \cong d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial\rho}{\partial P_2}\,dP_2$$

$$= \frac{-P_2}{(P_1-P_2)^2}\,dP_1 + \frac{P_1}{(P_1-P_2)^2}\,dP_2$$

$$\text{Maks. hata} = \Delta\rho \cong \left| \frac{-P_2\,dP_1}{(P_1 - P_2)^2} \right| + \left| \frac{P_1\,dP_2}{(P_1 - P_2)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{-5 \times 0{,}01}{4^2} \right| + \left| \frac{9 \times 0{,}02}{4^2} \right|$$

$$= \frac{0{,}23}{16} = 0{,}0144$$

bulunur.

30. *Üçgen şeklindeki bir bahçenin bir açısı 120° ve bu açıya ait kenarlarının uzunlukları 110 m ve 240 m dir. Bu uzunlukların ölçülmesinde 3 cm hata yapıldığına göre, üçüncü kenarın hesaplanmasında yapılacak maksimum hatayı yaklaşık olarak hesaplayınız.*

$$y = 110\text{ m}, \quad z = 240\text{ m}, \quad \alpha = 120^\circ$$

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 120^\circ$$

$$= y^2 + z^2 + yz$$

$$x = \sqrt{x^2 + z^2 + yz}$$

$$\Delta x \cong dx = \frac{y\,dy + z\,dz + 1/2\,(y\,dz + z\,dy)}{\sqrt{y^2 + z^2 + yz}}$$

$$= \frac{(2y + z)\,dy + (2z + y)\,dz}{2\sqrt{y^2 + z^2 + yz}}$$

ve $dy = dz = 0{,}03$ olarak :

$$\Delta x \cong \frac{(220 + 240 + 480 + 110)\,0{,}03}{2\sqrt{96100}}$$

$$\cong \frac{31{,}5}{2 \times 310} = 0{,}05$$

bulunur.

31. *Bir devrenin direnci* $i = \dfrac{E}{R}$ *formülünden faydalanarak hesaplanmaktadır. E elektromotor kuvvetini ölçerken 1/20 volt, i akımını ölçerken de — 1/10 amper okuma hatası yapılıyor. Bu şartlar altında i = 15 amper, E = 110 volt okunduğuna göre R direncinin hesabında yapılacak mutlak ve izafi hataları hesaplayınız.*

$$i = \frac{E}{R} \quad \text{den} \quad R = \frac{E}{i} \quad \text{olup:}$$

$$\Delta R \cong dR = \frac{\partial R}{\partial E} dE + \frac{\partial R}{\partial i} di$$

$$= \frac{1}{i} dE - \frac{E}{i^2} di$$

$$= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{20} - \frac{110}{15^2} \left(-\frac{1}{10}\right)$$

$$= 0{,}0522 \text{ ohm (mutlak hata)}$$

ve

$$\frac{\Delta R}{R} \cong \frac{dR}{R} = \frac{dE}{E} - \frac{di}{i}$$

$$= \frac{1/20}{110} + \frac{1/10}{15} = \% \frac{47}{60} \quad \text{(izafi hata)}$$

bulunur.

32. *$\sin(x + y)$ nin değerini:*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

formülü ile hesaplamak istiyoruz. x ve y açılarından herbirinin ölçülüşünde 0,1 derecelik birer hata yapıldığı ve bu dar açıların:

$$\sin x = \frac{3}{5} \quad \text{ve} \quad \sin y = \frac{5}{13}$$

olacak surette ölçüldükleri bilindiğine göre $\sin(x + y)$ nin hesabında yapılan yaklaşık hata nedir?

$$z = \sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\Delta z \cong dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) dx + (-\sin x \sin y + \cos x \cos y) dy$$

ve $dx = dy = \dfrac{0{,}1\,\pi}{180}$ olarak:

$$\Delta z \cong (2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y)\frac{0{,}1\,\pi}{180}$$

$$= 2\left[\sqrt{1-\frac{9}{25}}\sqrt{1-\frac{25}{169}} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\right]\frac{0{,}1\,\pi}{180}$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\right)\frac{\pi}{1800}$$

$$= \frac{66}{65}\cdot\frac{\pi}{1800} = 0{,}0018$$

bulunur.

33. *r_1, r_2, r_3, r_4 dirençlerini haiz olan dört direnç teli paralel olarak bağlanmışsa sonuç olan R direnci şu bağıntı ile verilmiştir:*

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$$

r_1, r_2, r_3, r_4 de ayni E izafi hatası yapıldığı zaman R'in hesabında buna karşılık yapılacak izafi hatanın da E olacağını gösteriniz.

$$\frac{d\,r_1}{r_1} = \frac{d\,r_2}{r_2} = \frac{dr_3}{r_3} = \frac{dr_4}{r_4} = \mathrm{E}$$

olup verilen ifadeden :

$$-\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2} = -\frac{dr_1}{r_1^2} - \frac{dr_2}{r_2^2} - \frac{dr_3}{r_3^2} - \frac{dr_4}{r_4^2}$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\cdot\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{r_1}\ \frac{dr_1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\cdot\frac{dr_2}{r_2} + \frac{1}{r_3}\cdot\frac{dr_3}{r_3} + \frac{1}{r_4}\cdot\frac{dr_4}{r_4}$$

$$= \mathrm{E}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$$

elde edilir. Halbuki $\Delta\mathrm{R} \cong d\mathrm{R}$ olup :

$$\frac{\Delta\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\ \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$$

$$\frac{\Delta\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \mathrm{E}$$

bulunur.

34 *Uzunluğu sabit ve a ya eşit olan ve uçları koordinat eksenleri üzerinde hareket eden bir doğru parçasının zarfının uzunluğunu hesaplayınız.*

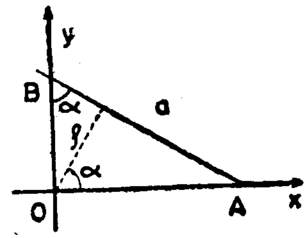
Şekil 117 ye göre $\overline{AB}$ doğru parçasının denklemi :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0$$

ve $\rho = \overline{OA}\cos\alpha$, $\overline{OA} = a\sin\alpha$ olup $\rho = a\sin\alpha\cos\alpha$ olarak :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

dır. Buna göre zarfın parametrik denklemleri :



Şekil 117

$$f(x,y,\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - a\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$f'_\alpha(x,y,\alpha) = -x\sin\alpha + y\cos\alpha - a\cos^2\alpha + a\sin^2\alpha = 0$$

denklemlerinden :

$$x = a\sin^3\alpha\,, \qquad y = a\cos^3\alpha$$

olarak bulunur. Zarfın kartezyen denklemi ise :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

olup bu da zarf eğrisinin dört rebrusmanlı bir hiposikloid eğrisi olduğunu gösterir.

Bu eğrinin uzunluğu :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = 3a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \frac{3}{2}\, a\sin 2\alpha\, d\alpha$$

olarak :

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} a\sin 2\alpha\, d\alpha$$

$$= 3a\Big| -\cos 2\alpha \Big|_0^{\pi/2} = 6a$$

bulunur.

35. *Alanları sabit ve A değerine eşit olan bütün $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ elipslerinin zarfının denklemini bulunuz.*

$A = \pi a b$ formülünden $b = \dfrac{A}{\pi a}$ olarak elipslerin denklemi :

$$\frac{A^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{a^2}x^2+a^2y^2=a^2\frac{A^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{A^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{a^2}x^2+a^2y^2=\frac{A^2}{\pi^2} \tag{1}$$

şeklini alır. Bu denklemden, a ya göre türev alarak:

$$-\frac{2A^2x^2}{\pi^2a^3}+2ay^2=0$$

$$\frac{A^2x^2}{\pi^2a^3}-ay^2=0$$

$$A^2x^2-\pi^2y^2a^4=0$$

ve (1) denkleminden:

$$A^2x^2+\pi^2y^2a^4=A^2a^2$$

olarak iki denklem taraf tarafa toplanırsa:

$$2A^2x^2=A^2a^2 \quad , \quad x=\mp\frac{a}{\sqrt{2}}$$

ve

$$\frac{A^2a^2}{2}+\pi^2y^2a^4=A^2a^2$$

$$2\pi^2y^2a^4=A^2a^2$$

$$y^2=\frac{A^2}{2\pi^2a^2} \quad , \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}$$

parametrik denklemleri bulunur. Bunlardan a yok edilirse zarfın kartezyen denklemi olarak:

$$xy=\pm\frac{A}{2\pi}$$

elde edilir.

36. *Başlangıç noktasından geçen ve merkezleri $x^2-y^2=a^2$ hiperbolü üzerinde bulunan dairelerin zarfının kartezyen denklemini bulunuz*

Dairelerin denklemi:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2=r^2$$

ve daireler (0,0) noktasından geçtiğine göre $\alpha^2+\beta^2=r^2$ olarak:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0 \qquad (1)$$

dır. Merkezler $x^2 - y^2 = a^2$ hiperbolü üzerinde olduğuna göre $\alpha^2 - \beta^2 = a^2$ olarak $\beta = \sqrt{\alpha^2 - a^2}$ dir. (1) denkleminin α ya göre türevi alınırsa:

$$-2x - 2y\beta' = 0$$

$$x + y\beta' = 0 \quad \text{ve} \quad \beta' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - a^2}} \quad \text{olduğundan}$$

$$x + \frac{\alpha y}{\sqrt{\alpha^2 - a^2}} = 0$$

$$\sqrt{\alpha^2 - a^2}\, x + \alpha y = 0 \qquad (2)$$

$$(\alpha^2 - a^2)\, x^2 = \alpha^2 y^2$$

$$\alpha^2 (x^2 - y^2) = a^2 x^2$$

$$\alpha^2 = \frac{a^2 x^2}{x^2 - y^2} \quad , \quad \alpha = \pm \frac{ax}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

ve (+) lısı (2) denklemini sağlamadığından çözüm olmayıp:

$$\alpha = -\frac{ax}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

bulunur, Bu değer (1) de yerine konursa:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2y\sqrt{\alpha^2 - a^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2ax^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 2y\sqrt{\frac{a^2 x^2}{x^2 - y^2} - a^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2ax^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{2ay^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2a(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2a\sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 = -2a\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 (x^2 - y^2)$$

elde edilir.

Aşağıdaki fonksiyanların x ve y ye göre kısmî türevlerini hesaplayınız.

37. $z = \log(x^3 + y^2)$
38. $u = 10^{x^2} + xy + z^2$
39. $u = x \sin y + y \sec x$
40. $z = ch(x^2 + 3y)$
41. $z = x\, e^{\sin y}$
42. $z = \text{Arcsin}\, xy$
43. $z = \text{Arctg}\, \dfrac{y}{x}$
44. $z = \text{Arctg}\, \dfrac{y}{x} + e^{x^4 + y^4}$
45. $z = \sin(2x - y) + \log(x^2 + 3y)$
46. $z = e^{xy} + \text{Arc}\sin \dfrac{x}{y}$
47. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ ise $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ olduğunu gösteriniz.
48. $z = \dfrac{x^4 - y^4}{xy}$ ise $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$ olduğunu gösteriniz.
49. $z = \dfrac{x^n - y^n}{xy}$ ise $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = (n-2)z$ olduğunu gösteriniz.

Aşağıdaki ifadelerden $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *türevlerini hesaplayınız.*

50. $z = x^3 y^2 + y^5$
51. $z = x \sin y$
52. $z = \sin 3x \cos 2y$
53. $z = e^{x + y^2}$
54. $z = \sin(2x + 3y)$
55. $z = \log \sqrt{x^3 + y^4}$
56. $z = x^3 y + y^4$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ olduğunu gösteriniz.
57. $z = e^{xy}$ ise $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}$ olduğunu gösteriniz.
58. $z = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

59. $z = 13x^7 + 10xy + 2y^2$ ise $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 6\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

60. $z = x^4y^2 \operatorname{Arcsin}\dfrac{y}{x}$ ise $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6z$ olduğuna gösteriniz.

61. $z = x^2 + 4y^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$ olduğuna göre $\dfrac{dz}{dt}$ yi hesaplayınız

Cevap: $2x\cos t - 8y\sin t$

62. $z = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$, $x = 3\varphi$, $y = e^{\varphi}$ olduğuna göre $\dfrac{dz}{d\varphi}$ yi hesaplayınız.

63. $z = ch\dfrac{y}{x}$, $x = \varphi^2$, $y = e^{\varphi}$ olduğuna göre $\dfrac{dz}{d\varphi}$ yi hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{1}{x^2}\operatorname{sh}\dfrac{y}{x}\,(x\,e^{\varphi} - 2y\varphi)$

64. $z = (x^2 + 4y^2 - 16)^{3/2}$ ve $y = \sqrt{x}$ olduğnna göre $\dfrac{dz}{dx}$ i hesaplayınız.

65. $z = e^{y/x}$ ve $y = \operatorname{tg} x$ olduğuna göre $\dfrac{dz}{dx}$ i hesaplayınız.

66. $z = x^2y^3$, $x = \dfrac{\sin t}{s}$, $y = \dfrac{s}{t}$ olduğuna göre $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ i hesaplayınız.

67. $z = u^2 + v^2 + w^2$, $u = ye^x$, $v = xe^{-y}$, $w = \dfrac{y}{x}$ olduğuna göre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yi hesaplayınız.

Aşağıdaki fonksiyonların toplam diferansiellerini hesaplayınız.

68. $z = x^3y + x^2y^2 + 1$

69. $u = e^{x^2 - y^2 - 2z}$

70. $u = xe^{y+4z}$

71. $u = s^2e^{\sin t}$

72. $u = \operatorname{Arccos}(2x - y)$

73. $u = \operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}$

Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında belirtilen noktalardaki toplam diferansiellerini bulunuz.

74. $z = 2x^2y - 3xy^3$ P(2, 1) Cevap: $dz = dx - 10\,dy$

75. $z = x\cos xy$ $P\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ Cevap: $dz = -\dfrac{\pi}{2}\,dx - 4dy$

76. $z = x\,e^y + y\sin x$ $P\left(\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$ Cevap: $dz = e^2dx + \left(\dfrac{\pi}{2}e^2 + 1\right)dy$

77. $f(x, y, z) = x^2yz - 2xy^2z + 4yz^3$ P(1, 2, 1)

78. $f(x, y, z) = xy\sin z - y^2\,e^{xz}$ $P\left(2, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

79. $f(x, y, z) = \log \frac{x^2+y^2}{z} + z\text{Arctg}\frac{y}{x}$ P(1, 1, 2)

80. $z = f(x,y)$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ olduğuna göre:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

81. $z = f(x,y)$, $x = r\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$, $y = r\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ olduğuna göre:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

olduğunu gösteriniz.

82. $x^4y^2 - 3x^5y + x^6 + 8 = 0$ dan $\frac{dy}{dx}$ türevini hesaplayınız.

83. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ den $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ yi hesaplayınız.

84. $\text{Arctg}\frac{y}{x} + x^2 \sin yz - e^{yz} = 0$ dan $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ yi hesaplayınız.

85. $\sin(x + z) - x\, e^{yz} = 0$ dan $\frac{\partial z}{\partial x}$ i hesaplayınız.

Aşağıdaki diferansiellerin tam diferansiel olup olmadıklarını gösteriniz.

86. $x^2 \sin y\, dx + \frac{x^3}{3}\cos y\, dy$

87. $(x + \sin x \operatorname{tg} y)\, dx + (y + \operatorname{tg} x \sin y)\, dy$

88. $2x \log y\, dx + \frac{x^2}{y}\, dy$

89. $\left(3x^2 \log\frac{y}{x} - x^2\right) dx + \frac{3x^2}{y}\, dy$

90. $e^{y/x}\left(\text{sh}\, x - \frac{y}{x^2}\text{ch}\, x\right) dx + \frac{1}{x} e^{y/x}\, \text{ch}\, x\, dy$

Toplam diferansielden faydalanarak aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

91. $(3{,}02)^2(1{,}91) + (3{,}02)(1{,}91)^2$ — Cevap: 28,43

92. $\frac{(2{,}06)^2 + (3{,}95)^2}{(1{,}92)^2}$ — Cevap: 5.36

93. $\sqrt{(2{,}97)^2 + (2{,}05)^4}$ — Cevap: 5,142

94. $\sqrt[5]{(3{,}8)^2 + 2(2{,}1)^3}$ — Cevap: 2,01

95. $[(3{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (6{,}02)^2 + 5(1{,}97)^2]^{-1/2}$ Cevap: 0,111427

96. $z = f(x,y)$ fonksiyonu için $f(1,2) = 3$, $f_x'(1,2) = 2$, $f_y'(1,2) = 5$ olarak bilindiğine göre $f(1,1;\ 1,8)$, $f(1,2;\ 1,8)$ değerlerini hesaplayınız. Cevap: 2,2; 2,4

97. Gazların genel kanunu $pv = RT$ ifadesi ile verilmiştir. Bir gazın p basıncı ile v hacmı %3 er bağıl hata ile ölçülmüş ve R de %1 bağıl hata ile biliniyor ise T nin hesabında yapılacak bağıl hata ne olur? Cevap: % 7

98. Serbest olarak düşen bir cismin t saniyede aldığı yol $s = \frac{1}{2} gt^2$ dir. t zamanı $\frac{1}{5}$ saniyelik bir hata ile 10 saniye olarak ölçülmüş ve g nin değeride % 0,1 bağıl hata ile biliniyor ise S in hesabında yapılacak bağıl hatayı bulunuz. Cevap: %4,1.

99. Bir dik dörtgenler prızmasının kenarları $\frac{1}{8}$ cm hata ile 3, 4 ve 5 *dm* olarak ölçülmüştür. Bu kutunun hacmının hesabında yapılacak bağıl hatayı bulunuz.
Cevap: % 0,09 $\sim$ % 0,1

100. Bir C noktasının diğer bir B noktasına uzaklığı C açısı dik olan bir ABC üçgeni teşkil edilmek suretiyle belirtilmektedir. AC uzaklığı 0.5 m hata ile 1000 m ve $\widehat{CAB}$ açısı 1 dakika hata ile 59°37′ ölçülmüşse $\overline{CB}$ nin hesabında yapılması mümkün olan en büyük hatayı bulunuz.
Cevap: 2 metre,

101. R_1 ve R_2 dirençleri paralel bağlandıkları takdirde

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$$

ile belirli bir R direnci meydana getirmektedirler. R_1 ve R_2 nin ölçülmesinde yapılan maksimum bağıl hata 0,01 olduğuna göre R nin hesabında yapılan maksimum bağıl hata ne olur? Cevap: 0,01

14. DİFERANSİYEL DENKLEMLER

1. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x$$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=x(1-y)$$

$$\frac{dy}{1-y}=\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

yazılarak değişkenlere ayrılabilen tip de bir diferansiel denklem olduğu görülür. Her iki tarafın integralleri alınırsa:

$$\log k-\log(1-y)=\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\log\frac{k}{1-y}=\log\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{k}{1-y}=\sqrt{1+x^2}$$

$$k=\sqrt{1+x^2}\,(1-y)$$

$$(1+x^2)(1-y)^2=C$$

bulunur.

2. $xy^2\,dy+(x^3+y^3)\,dx$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Homojen tip de bir diferansiel denklem olup $y=ux$ dönüştürmesi ile $dy=u\,dx+x\,du$ olarak:

$$u^2x^3(u\,dx+x\,du)=(x^3+u^3x^3)\,dx$$

$$u^2(u\,dx+x\,du)=(1+u^3)\,dx$$

$$u^2x\,du=dx$$

$$u^2\,du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{u^3}{3} = \log\frac{x}{c}$$

ve

$$\frac{y^3}{3x^3} = \log\frac{x}{c}$$

elde edilir.

3. *$(2x + 3y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.*

Homojen tipte bir diferansiel denklem olup $y = ux$ dönüştürmesi ile $dy = u\,dx + x\,du$ olarak:

$$(2x + 3ux)\,dx + (ux - x)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(2 + 3u)\,dx + (u - 1)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(u^2 + 2u + 2)\,dx + (u - 1)\,x\,du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(u-1)\,du}{u^2+2u+2} = 0$$

$$\log x + \frac{1}{2}\log(u^2 + 2u + 2) - \int\frac{2\,du}{(u+1)^2+1} = C$$

$$\log x + \frac{1}{2}\log(u^2 + 2u + 2) - 2\,\mathrm{Arctg}\,(u + 1) = C$$

bulunur. Elde edilen bu sonuçta u yerine $\frac{y}{x}$ konulursa:

$$\log x + \frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2} + 2\,.\,\frac{y}{x} + 2\right) - 2\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x} + 1\right) = C$$

$$2\log x + \log(y^2 + 2xy + x^2) - 2\log x - 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x+y}{x} = k$$

$$\log(y^2 + 2xy + x^2) - 4\,\mathrm{Arctg}\,\frac{x+y}{x} = k$$

sonucuna varılır.

4. *$\left(x - y\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{y}{x}\right)dx + x\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{y}{x}\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.*

Homojen tipte bir diferansiel denklem olup $y = ux$ dönüştürmesi ile $dy = u\,dx + x\,du$ olarak denklem:

$$(x - ux \operatorname{Arcsin} u)\,dx + x \operatorname{Arcsin} u\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$dx + x \operatorname{Arcsin} u\,du = 0$$

şeklini alır ki bu da değişkenlere ayrılabilen tip de bir diferansiel denklemdir. Buradan:

$$\frac{dx}{x} + \operatorname{Arcsin} u\,du = 0$$

$$\log x + \int \operatorname{Arcsin} u\,du = C$$

elde edilerek ikinci terimdeki integrale kısmî integrasyon kuralını uygularsak:

$$\log x + u \operatorname{Arcsin} u - \int \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = C$$

$$\log x + u \operatorname{Arcsin} u + \sqrt{1-u^2} = C$$

ve u yerine $\frac{y}{x}$ koyarak:

$$\log x + \frac{y}{x} \operatorname{Arcsin} \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = C$$

$$x \log x + y \operatorname{Arcsin} \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 - y^2} = Cx$$

bulunur.

5. $x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Homojen tip de bir diferansiel denklem olup $y = ux$ dönüştürmesi ile $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ olarak:

$$x \cos u \left(u + x \cdot \frac{du}{dx}\right) = ux \cos u - x$$

$$u \cos u + x \cos u \cdot \frac{du}{dx} = u \cos u - 1$$

$$\cos u\,du = -\frac{dx}{x}$$

$$\sin u = -\log \frac{x}{C}$$

$$\sin u = \log \frac{C}{x}$$

ve

$$\frac{C}{x} = e^{\sin u}$$

$$x\, e^{\sin \frac{y}{x}} = C$$

bulunur.

6. *$(2x - 5y + 5)\,dx + (4x - y + 1)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.*

$x = x' + h$ ve $y = y' + k$ dönüştürmelerini yaparak denklemin homojen olabilmesi için h ve k nın hangi değerlerde olması gerektiğini araştıralım :

$$dx = dx' \ , \qquad dy = dy'$$

olarak :

$$(2x' - 5y' + 2h - 5k + 5)\,dx' + (4x' - y' + 4h - k + 1)\,dy' = 0$$

$$2h - 5k + 5 = 0 \ , \quad 4h - k + 1 = 0$$

dan $h = 0$, $k = 1$ bulunur. Bunlara göre $x' = x$ ve $y' = y - 1$ dir. $h = 0$ ve $k = 1$ değerleri için denklem :

$$(2x - 5y')\,dx + (4x - y')\,dy' = 0$$

şekline girerek homojen tipde olur. Bu denklemde $y' = ux$ dönüştürmesi yapılırsa $dy' = u\,dx + x\,du$ olarak :

$$(2x - 5ux)\,dx + (4x - ux)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$(2 - u - u^2)\,dx + x(4 - u)\,du = 0$$

elde edilip buradan da :

$$\frac{dx}{x} + \frac{(4-u)du}{2 - u - u^2} = 0$$

$$\log x + 2\log(u + 2) - \log(u - 1) = \log C$$

$$\log \frac{x(u+2)^2}{u-1} = \log C$$

$$\frac{x(u+2)^2}{u-1} = C$$

$$(y' + 2x)^2 = C(y' - x)$$

$$(2x + y - 1)^2 = C(y - x - 1)$$

bulunur.

7. *$(x - y - 1)\,dx + (4y + x - 1)\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.*

$x = x' + h$ ve $y = y' + k$ dönüştürmeleri yapılırsa $dx = dx'$ $dy = dy'$ olarak denklem :

$$(x' - y' + h - k - 1)\,dx' + (x' + 4y' + h + 4k - 1)\,dy' = 0$$

şeklini alır. Bu denklemin homojen olabilmesi için :

$$h - k - 1 = 0\ , \qquad h + 4k - 1 = 0$$

$$h = 1\ , \qquad k = 0$$

olması gerekir. Bunlara göre $x' = x - 1$, $y' = y$ ve denklem de;

$$(x' - y')\,dx' + (x' + 4y')\,dy' = 0$$

şeklinde bir homojen denklem olur. Burada da $y' = ux'$ dönüştürmesi yapılırsa $dy' = u\,dx' + x'\,du$ olarak :

$$(x' - ux')\,dx' + (x' + 4ux')(u\,dx' + x'\,du) = 0$$

$$(1 - u)\,dx' + (1 + 4u)(u\,dx' + x'\,du) = 0$$

$$(4u^2 + 1)\,dx' + (1 + 4u)\,x'\,du = 0$$

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{4u + 1}{4u^2 + 1}\,du = 0$$

$$\log x' + \frac{1}{2}\log(4u^2 + 1) + \frac{1}{2}\,\text{Arctg}\,2u = k$$

$$2\log x' + \log(4u^2 + 1) + \text{Arctg}\,2u = C$$

$$2\log(x - 1) + \log\left[\frac{4y^2}{(x-1)^2} + 1\right] + \text{Arctg}\,\frac{2y}{x-1} = C$$

$$\log\left[4y^2 + (x-1)^2\right] + \text{Arctg}\,\frac{2y}{x-1} = C$$

bulunur.

8. *$(x\sqrt{x^2+y^2} - y)\,dx + (y\sqrt{x^2+y^2} - x)\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.*

$$M = x\sqrt{x^2+y^2} - y \quad , \qquad N = y\sqrt{x^2+y^2} - x$$

olarak:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1$$

ve $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olup denklem tam diferansiel denklem tipindedir.

Çözümü $f(x,y) = C$ şeklindedir.

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = x\sqrt{x^2+y^2} - y$$

den:

$$f(x,y) = \int (x\sqrt{x^2+y^2} - y)\, dx + F(y)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} - xy + F(y)$$

bulunur. Her iki tarafın y ye göre türevi alınırsa:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(x^2+y^2)^{1/2} - x + F'(y) = N = y\sqrt{x^2+y^2} - x$$

ve buradan:

$$F'(y) = 0 \quad , \quad F(y) = k$$

bulunarak:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2} - xy + k = c'$$

$$(x^2+y^2)^{3/2} - 3xy = C$$

elde edilir:

9. *Arcsin* $\frac{x}{y}\, dx + \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}\, dy = 0$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$$M = \text{Arcsin}\,\frac{x}{y} \quad , \qquad N = \frac{\sqrt{y^2-x^2}}{y}$$

olarak:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$$

ve $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olup denklem tam diferansiel denklem tipindedir.

Çözümü $f(x,y) = C$ şeklinde olup:

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = \text{Arcsin}\ \frac{x}{y}$$

den :

$$f(x,y) = \int \text{Arcsin}\ \frac{x}{y}\, dx + F(y)$$

$$f(x,y) = x\ \text{Arcsin}\ \frac{x}{y} + \sqrt{y^2 - x^2} + F(y)$$

bulunur. Her iki tarafın y ye göre türevi alınırsa :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y} = \frac{-x^2}{y\sqrt{y^2 - x^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} + F'(y)$$

$$\frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y} + F'(y)$$

ve buradan :

$$F'(y) = 0\ , \qquad F(y) = k$$

bulunarak :

$$f(x,y) = x\ \text{Arcsin}\ \frac{x}{y} + \sqrt{y^2 - x^2} = C$$

elde edilir.

!0. *$(2x \cos y - y^2 \sin x)\, dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)\, dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.*

$$M = 2x \cos y - y^2 \sin x\ , \qquad N = 2y \cos x - x^2 \sin y$$

olarak :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x \sin y - 2y \sin x\ , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y \sin x - 2x \sin y$$

ve $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ olup denklem tam diferansiel denklem tipindedir.

Çözümü $f(x,y) = C$ şeklinde olup :

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y - y^2 \sin x$$

den :

$$f(x,y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + F(y)$$

bulunur. Her iki tarafın y ye göre türevi alınırsa :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = -x^2 \sin y + 2y \cos x + F'(y) = 2y \cos x - x^2 \sin y$$

ve buradan :

$$F'(y) = 0 \ , \quad F(y) = k$$

$$f(x,y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + k = C'$$

$$x^2 \cos y + y^2 \cos x = C$$

bulunur.

11. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = \frac{x^2-3}{2x}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Birinci mertebeden lineer tipde bir diferansiel denklem olup sabitin değişimi kuralını uygulamak üzere evvela ikinci tarafsız denklemin genel çözümünü bulalım :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = 0$$

dan :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \quad , \qquad \log \frac{y}{c} = \frac{1}{2} \log x = \log \sqrt{x}$$

$$y = c\sqrt{x}$$

bulunur. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\frac{dc}{dx} + \frac{c}{2\sqrt{x}}$$

olarak bu türev ve y fonksiyonu ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$\sqrt{x}\frac{dc}{dx} + \frac{c}{2\sqrt{x}} - \frac{c\sqrt{x}}{2x} = \frac{x^2-3}{2x}$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{x^2-3}{2x\sqrt{x}}$$

olup buradan :

$$c = \frac{1}{3} x^{3/2} + 3x^{-1/2} + k$$

bulunarak :

$$y = c\sqrt{x} = \frac{1}{3} x^2 + 3 + k\sqrt{x}$$

elde edilir.

12. *$(y \cos 2x + 2\sqrt{\sin^3 2x})\,dx + \sin 2x\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.*

Her iki taraf $\sin 2x\,dx$ e bölünürse denklem :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} y = -2\sqrt{\sin 2x}$$

şeklini alır ki bu da lineer tip de bir diferansiel denklemdir. Bu denklemin çözümünü elde etmek üzere $y = uv$ dönüştürmesi yapılırsa $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$ olarak denklem :

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} uv = -2\sqrt{\sin 2x}$$

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} v\right) = -2\sqrt{\sin 2x}$$

şeklini alır. Bu denklemden v yi :

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} v = 0$$

olacak şekilde belirtelim :

$$\frac{dv}{v} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx = 0$$

$$\log v + \frac{1}{2} \log \sin 2x = \log C$$

$$\log (v\sqrt{\sin 2x}) = \log C$$

$$v\sqrt{\sin 2x} = C$$

$$v = \frac{C}{\sqrt{\sin 2x}}$$

olup denklemde yerine konursa :

$$\frac{C}{\sqrt{\sin 2x}} \frac{du}{dx} = -2\sqrt{\sin 2x}$$

$$du = -\frac{2}{C} \sin 2x$$

$$u = \frac{1}{C} \cos 2x + C'$$

elde edilir. Bunlara göre :

$$y = uv = \frac{C}{\sqrt{\sin 2x}}\left(\frac{1}{C}\cos 2x + C'\right)$$

$$= \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} + \frac{K}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$y = \frac{K + \cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

bulunur.

13. $\frac{dy}{dx} + y(\cot g\, x + 3 \cot g\, 3x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x \sin 3x (\cos x + \sin x - 1)}$ *diferansiyel denklemini çözünüz.*

Birinci mertebeden lineer tip te bir diferansiel denklem olup sabitin değişimi kuralını uygulamak üzere evvela ikinci tarafsız denklemin genel çözümünü bulalım:

$$\frac{dy}{dx} + y(\cot g\, x + 3\cot g\, 3x) = 0$$

$$\frac{dy}{y} + (\cot g\, x + 3\cot g\, 3x)\, dx = 0$$

$$\log y + \log \sin x + \log \sin 3x = \log C$$

$$\log(y \sin x \sin 3x) = \log C$$

$$y = \frac{C}{\sin x \sin 3x}$$

bulunur. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için C nin nasıl bir C(x) fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \sin 3x \frac{dC}{dx} - C(\sin 3x \cos x + 3 \sin x \cos 3x)}{\sin^2 x \sin^2 3x}$$

olup y ile birlikte denklemde yerlerine konursa:

$$\frac{1}{\sin x \sin 3x}\frac{dC}{dx} - \frac{C\cos x}{\sin^2 x \sin 3x} - \frac{3C\cos 3x}{\sin x \sin^2 3x} + \frac{C\cos x}{\sin^2 x \sin 3x}$$

$$+ \frac{3C\cos 3x}{\sin x \sin^2 3x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x \sin 3x(\cos x + \sin x - 1)}$$

$$dC = \frac{1 - \cos x}{\cos x + \sin x - 1}\, dx$$

$$C = \int \frac{(1-\cos x)\,dx}{\cos x+\sin x-1}$$

integraline varılır. Bu integrali hesaplamak için de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ dönüştürmesi yapılırsa .

$$C = \int \frac{2t\,dt}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\log\frac{t^2+1}{(1-t)^2} - \operatorname{Arctg} t + K$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-\sin x} - \frac{x}{2} + K$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\log(1-\sin x)+x\Big]+K$$

elde edilir. C nin bu değerini $y=\dfrac{C}{\sin x\sin 3x}$ ifadesinde yerine koyarsak :

$$y = \frac{-x-\log(1-\sin x)+K}{\sin x\sin 3x}$$

bulunur.

14. *Direnci R, self indüksiyonu L olan ve e E.M.K inde bir genaratörü havi olan bir devrede, değişen rejim halinde, akımın i şiddetini veren denklem :*

$$L\frac{di}{dt}+Ri = E\sin\omega t$$

dir. $t=0$ *iken* $i=0$ *farzederek i akımını veren ifadeyi belirtiniz.*

Birinci mertebeden lineer tipte bir diferansiel denklem olup sabitin değişimi kuralını uygulamak üzere evvela ikinci tarafsız denklemin genel çözümünü bulalım :

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0$$

$$\frac{di}{i}+\frac{R}{L}dt=0$$

$$\log i+\frac{R}{L}t=\log C$$

$$= Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

dir. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için C nin nasıl bir $C(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{di}{dt} = e^{-\frac{R}{L}t}\frac{dC}{dt} - \frac{R}{L}Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

olup i ile birlikte denklemde yerlerine konursa :

$$Le^{-\frac{R}{L}t}\frac{dC}{dt} - RCe^{-\frac{R}{L}t} + RCe^{-\frac{R}{L}t} = E\sin\omega t$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t$$

$$C = \frac{E}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt$$

integraline varılır. Bu integrali hesaplamak için de kısmi integrasyon kuralını uygularsak :

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t - \frac{\omega L}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t\,dt$$

$$= \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t - \frac{\omega L^2}{R^2}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t - \frac{\omega^2L^2}{R^2}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt$$

$$= \frac{RL}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t - \frac{E\omega L}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t + K'$$

$$C = \frac{E}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt = \frac{ER}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t - \frac{E\omega L}{R^2+L^2\omega^2}e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t + K$$

elde edilir. C nin bu değerini yukarıda bulunan i ifadesinde yerine koyarsak ;

$$i = \frac{ER}{R^2+L^2\omega^2}\sin\omega t - \frac{E\omega L}{R^2+L^2\omega^2}\cos\omega t + Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

bulunur. $t = 0$ iken $i = 0$ olduğu göz önünde tutulursa :

$$0 = -\frac{EL\omega}{R^2+L^2\omega^2} + K$$

ve

$$K = \frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

olarak :

$$i = \frac{ER}{R^2 + L^2\omega^2}\sin\omega t - \frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\cos\omega t + \frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

bulunur.

15. *$2yy'(1+x) + 2x - x^2 + y^2 = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.*

Her iki taraf $2y(1+x)$ ile bölünürse denklem :

$$y' + \frac{y}{2(1+x)} = \frac{x^2 - 2x}{2(1+x)}.y^{-1}$$

şeklini alır ki bu da Bernoulli tipinde bir diferansiel denklemdir. $y^{1-n} = y^2 = u$ dönüştürmesi yapılırsa $2yy' = u'$ olarak denklem:

$$u' + \frac{u}{1+x} = \frac{x^2 - 2x}{2(1+x)}$$

şeklinde bir lineer diferansiel denklem haline gelir. Buradan da:

$$u' + \frac{u}{1+x} = 0\,, \quad \frac{u'}{u} = -\frac{1}{1+x}$$

$$\log\frac{u}{c} = -\log(1+x)$$

$$u = \frac{c}{1+x}$$

elde edilir. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel cözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$u' = \frac{c'}{1+x} - \frac{c}{(1+x)^2}$$

olup u ile birlikte lineer denklemde yerlerine konursa :

$$\frac{c'}{1+x} - \frac{c}{(1+x)^2} + \frac{c}{(1+x)^2} = \frac{x^2 - 2x}{1+x}$$

$$c' = x^2 - 2x$$

$$c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + K$$

elde edilir· c nin bu değerini bulunan u ifadesinde yerine koyarsak:

$$u = \frac{x^3 - 3x^2 + K}{3(1+x)}$$

ve $u = y^2$ olduğu göz önüne alınırsa:

$$y^2 = \frac{x^3 - 3x^2 + K}{3(1+x)}$$

bulunur.

6. *$[xy - x^3y^3(1+x^2)]\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ diferansiel denklemini çözünüz.*

Her iki tarafı $(1+x^2)dx$ ile bölersek:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = x^3y^3$$

şeklinde bir denkleme varırız ki bu da Bernoulli tipinde bir diferansiel denklemdir. $y^{-2} = u$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx} \quad \text{olarak denklem:}$$

$$-\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = x^3y^3$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}u = -2x^3$$

şeklinde bir lineer diferansiel denklem haline gelir. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü;

$$\frac{du}{u} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$\log\frac{u}{c} = \log(1+x^2)$$

$$u = c(1+x^2)$$

dir. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{du}{dx}=(1+x^2)\frac{dc}{dx}+2cx$$

olup u ile birlikte yerlerine konursa :

$$(1+x^2)\frac{dc}{dx}+2cx-\frac{2x}{1+x^2}.c(1+x^2)=-2x^3$$

$$\frac{dc}{dx}=-\frac{2x^3}{1+x^2}=-2x+\frac{2x}{1+x^2}$$

$$c=-x^2+\log(1+x^2)+\mathrm{K}$$

elde edilir. c nin bu değerini u ifadesinde yerine koyarsak:

$$u=y^{-2}=-x^2(1+x^2)+(1+x^2)\log(1+x^2)+\mathrm{K}(1+x^2)$$

ve

$$y^2=\frac{1}{(1+x^2)[\mathrm{K}-x^2+\log(1+x^2)]}$$

bulunur.

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Bernoulli tipinde bir diferansiel denklem olup $y^{1/2}=u$ dönüştürmesi yapılırsa $\dfrac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\dfrac{du}{dx}$ olarak:

$$2\sqrt{y}\frac{du}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{x}{2(x^2-1)}\sqrt{y}=\frac{x}{2}$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{xu}{2(x^2-1)}=\frac{x}{2}$$

lineer diferansiel denklemine varılır. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü:

$$\frac{du}{dx}-\frac{ux}{2(x^2-1)}=0$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x\,dx}{2(x^2-1)}$$

$$\log\frac{u}{c} = \frac{1}{4}\log(x^2-1)\,, \quad u = c\,\sqrt[4]{x^2-1}$$

dir. Şimdi de bu ifadenin, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{du}{dx} = \sqrt[4]{x^2-1}\,\frac{dc}{dx} + \frac{1}{2}\,cx(x^2-1)^{-3/4}$$

olup u ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$\sqrt[4]{x^2-1}\,\frac{dc}{dx} + \frac{1}{2}\,cx(x^2-1)^{-3/4} - \frac{x}{2(x^2-1)}\,c\,\sqrt[4]{x^2-1} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{x}{2\,\sqrt[4]{x^2-1}}$$

$$c = \int\frac{x\,dx}{2\,\sqrt[4]{x^2-1}} = \frac{1}{3}\,(x^2-1)^{3/4} + K$$

elde edilir. c nin bu değerini u ifadesinde yerine koyarsak :

$$u = \frac{x^2-1}{3} + K\,\sqrt[4]{x^2-1}$$

$$y = \left(\frac{x^2-1}{3} + K\,\sqrt[4]{x^2-1}\right)^2$$

bulunur.

18. $y - \cos x\,\dfrac{dy}{dx} = y^2\cos x(1-\sin x)$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Bernoulli tipinde bir diferansiel denklem olup $y^{-1}=u$ dönüştürmesi yapılırsa $-\dfrac{dy}{dx} = y^2\dfrac{du}{dx}$ olarak :

$$y^2\,\frac{du}{dx} + \frac{y}{\cos x} = y^2(1-\sin x)$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{\cos x} = 1 - \sin x$$

lineer diferansiel denklemine varılır. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü ;

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{\cos x} = 0$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{\cos x} = -\sec x\,dx$$

$$\log\frac{u}{c} = -\log(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

$$u = \frac{c}{\sec x + \operatorname{tg} x}$$

dir. Şimdi de bu ifadenin, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiği- araştıralım :

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{dc}{dx} - c\sec x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$$

olup u ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$\frac{\frac{dc}{dx} - c\sec x}{\sec x + \operatorname{tg} x} + \frac{c}{\cos x(\sec x + \operatorname{tg} x)} = 1 - \sin x$$

$$\frac{dc}{dx} = (\sec x + \operatorname{tg} x)(1 - \sin x)$$

$$\frac{dc}{dx} = \cos x$$

$$c = \sin x + K$$

elde edilir. c nin bu değerini u ifadesinde yerine koyarsak :

$$u = \frac{\sin x + K}{\sec x + \operatorname{tg} x}$$

ve

$$y = \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sin x + K}$$

bulunur.

19. $\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$\frac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1$ den $\frac{dx}{dy} = x^2y^3 + xy$ veya $\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$

yazılarak Bernoulli tipinde bir diferansiel denkleme varılmış olur. Burada $x^{-1} = u$ dönüştürmesi yapılırsa $-x^{-2}\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{du}{dy}$ olarak :

$$\frac{du}{dy} + yu = -y^3$$

lineer diferansiel denklemi elde edilir. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü :

$$\frac{du}{dy} = -yu \quad , \quad \frac{du}{u} = -y\,dy$$

$$\log\frac{u}{c} = -\frac{y^2}{2} \quad \text{ve} \quad u = c\,e^{-\frac{y^2}{2}}$$

dir. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{du}{dy} = e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{dc}{dy} - c\,y\,e^{-\frac{y^2}{2}}$$

olup u ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{dc}{dy} - c\,y\,e^{-\frac{y^2}{2}} + c\,y\,e^{-\frac{y^2}{2}} = -y^3$$

$$\frac{dc}{dy} = -y^3\,e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$c = -\int y^3\,e^{\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$c = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2\,e^{\frac{y^2}{2}} + \text{K}$$

elde edilir. c nin bu değerini u ifadesinde yerine koyarsak :

$$u = e^{-\frac{y^2}{2}}\left[-y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2\,e^{\frac{y^2}{2}} + \text{K}\right]$$

$$u = (2 - y^2) + \text{K}\,e^{-\frac{y^2}{2}}$$

ve

$$x\left[(2-y^2)e^{\frac{y^2}{2}}+\mathrm{K}\right]=e^{\frac{y^2}{2}}$$

bulunur.

20. *Herhangibir noktasındaki eğimi*

$$\frac{y^2 \log x - y}{x}$$

olan ve (1, 1) noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\log x-y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2\log x}{x}$$

yazılarak Bernoulli tipinde bir diferansiel denkleme varılır. Burada $y^{-1}=u$ dönüştürmesi yapılırsa $-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}$ olarak :

$$-\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=\frac{\log x}{x}$$

lineer diferansiel denklemine varılır. Bu denklemin ikinci tarafsızının gehel çözümü :

$$-\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=0 \quad , \quad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}$$

$$\log\frac{u}{c}=\log x \quad \text{ve} \quad u=cx$$

dir. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{du}{dx}=x\frac{dc}{dx}+c$$

olup u ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$-x\frac{dc}{dx}-c+c=\frac{\log x}{x}$$

$$\frac{dc}{dx}=-\frac{1}{x^2}\log x$$

$$c = \int -\frac{1}{x^2} \log x \, dx = \frac{1}{x} \log x + \frac{1}{x} + K$$

elde edilir. c nin bu değerini u ifadesinde yerine koyarsak:

$$u = \frac{1}{y} = \log x + 1 + Kx$$

ve

$$y = \frac{1}{\log x + 1 + Kx}$$

bulunur. Eğri (1,1) noktasından geçtiğine göre:

$$1 = \frac{1}{\log 1 + 1 + K} \quad \text{dan} \quad K = 0$$

olarak eğrinin denklemi:

$$y(\log x + 1) = 1$$

dir.

21. $y' + y^2 = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Riccati diferansiel denklemi olup $y_1 = \frac{1}{x}$ denklemin bir özel çözümüdür.

Buna göre $y = \frac{1}{x} + u$ dönüştürmesi yapılırsa $y' = -\frac{1}{x^2} + u'$ olarak:

$$-\frac{1}{x^2} + u' + \left(\frac{1}{x} + u\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{u}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$u' + \frac{1}{x^2} + 2u \cdot \frac{1}{x} + u^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{u}{x}$$

$$u' + \frac{u}{x} = -u^2$$

şeklinde Bernoulli tipinde bir diferansiel denkleme varılır. Burada $u^{-1} = z$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$z = \frac{1}{cx + x\log x} \quad \text{ve} \quad y = \frac{cx + x\log x + x}{x(cx + x\log x)} = \frac{c + 1 + \log x}{cx + x\log x}$$

bulunur.

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - x^2 y - 2x}{1 - x^2}$ *Riccati denkleminin, bir özel çözümü* $(-x^2)$ *olduğuna göre, genel çözümünü bulunuz.*

$y = -x^2 + u$ dönüştürmesi yapılırsa

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 3ux^2}{1 - x^2}$$

şeklinde Bernoulli tipinde bir denkleme varılır Buradan da

$$u = \frac{x^3 - 1}{x + c}$$

bulunarak

$$y = -x^2 + \frac{x^3 - 1}{x + c} = \frac{-cx^2 - 1}{x + c}$$

sonucuna varılır.

23. *$(x^2+1)y' + 2x^3y + (1-x^2)y^2 = (x^2+1)^2$ diferansiel denkleminin bir özel çözümü $y = x$ olduğuna göre, genel çözümünü bulunuz.*

Riccati tipinde bir diferansiel denklem olup $y = x + u$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$(x^2 + 1)u' + 2xu = (x^2 - 1)u^2$$

şeklinde bir Benoulli diferansiel denklemine varılmış olur Bu denklemin çözümü:

$$u = \frac{1}{x + c(x^2 + 1)}$$

olup:

$$y = \frac{x^2 + 1 + c(x^3 + x)}{x + c(x^2 + 1)}$$

dir.

24 *$y = \cos x$ ın bir özel çözüm olduğu bilindiğine göre*

$$\frac{dy}{dx}(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$$

Riccatı denklemini çözünüz

$y = \cos x + u$ dönüştürmesi yapılırsa $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x + \dfrac{du}{dx}$ olarak:

$$\left(-\sin x+\frac{du}{dx}\right)(1-\sin x\cos x)+(\cos x+u)^2\cos x-(\cos x+u)$$
$$+\sin x=0$$

$$(1-\sin x\cos x)\frac{du}{dx}-\sin x+\sin^2 x\cos x+\cos^3 x+2u\cos^2 x+$$
$$u^2\cos x-\cos x-u+\sin x=0$$

$$(1-\sin x\cos x)\frac{du}{dx}+\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+2u\cos^2 x+$$
$$u^2\cos x-\cos x-u=0$$

$$(1-\sin x\cos x)\frac{du}{dx}+(2\cos^2 x-1)u+u^2\cos x=0$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{2\cos^2 x-1}{1-\sin x\cos x}u=-\frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}u^2$$

şeklinde Bernoulli tipi bir diferansiel denkleme varılır. Burada $u^{-1}=z$ dönüştürmesi yapılırsa $-u^{-2}\frac{du}{dx}=\frac{dz}{dx}$ olarak :

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2\cos^2 x-1}{1-\sin x\cos x}z=\frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}$$

lineer diferansiel denklemi elde edilir. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü :

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2\cos^2 x-1}{1-\sin x\cos x}z=0$$

$$\frac{dz}{z}-\frac{2\cos^2 x-1}{1-\sin x\cos x}dx=0$$

$$\log z+\log(1-\sin x\cos x)=\log c$$

$$z(1-\sin x\cos x)=c$$

$$z=\frac{c}{1-\sin x\cos x}$$

dir: Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1-\sin x\cos x}\frac{dc}{dx}+\frac{c\cos 2x}{(1-\sin x\cos x)^2}$$

olup u ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$\frac{1}{1-\sin x\cos x}\frac{dc}{dx}+\frac{c\cos 2x}{(1-\sin x\cos x)^2}-\frac{c\cos 2x}{(1-\sin x\cos x)^2}=\frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}$$

$$\frac{dc}{dx}=\cos x \quad , \quad c=\sin x+K$$

elde edilir. c nin bu değerini z ifadesinde yerine koyarsak:

$$z=\frac{\sin x+K}{1-\sin x\cos x}$$

ve

$$u=\frac{1-\sin x\cos x}{\sin x+K}$$

bulunur. u nun bu değeri de $y=\cos x+u$ ifadesinde yerine konursa:

$$y=\cos x+u=\cos x+\frac{1-\sin x\cos x}{\sin x+K}$$

$$y=\frac{\sin x\cos x+K\cos x+1-\sin x\cos x}{\sin x+K}$$

$$y=\frac{K\cos x+1}{\sin x+K}$$

sonucuna varılır.

25. $y=x\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Clairaut denklemi olup $\dfrac{dy}{dx}=p$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$y=px+p^2$$

elde edilir. Her iki tarafın diferansielleri eşitlenirse:

$$dy=p\,dx+x\,dp+2p\,dp$$

ve $dy=p\,dx$ olduğu göz önüne alınırsa:

$$p\,dx=p\,dx+x\,dp+2p\,dp$$

$$(x+2p)\,dp=0$$

bulunur. Buradan:

I. $dp = 0$ ve $p = c$ olup denklemde yerine konursa:

$$y = cx + c^2$$

genel denklemi elde edilir ki bir doğru ailesi gösterir.

II. $x + 2p = 0$ ve $x = -2p$ olup denklemde yerine konursa:

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

şeklinde tekil çözüm elde edilir. Bu da yukarıda bulunan doğru ailesinin zarfı olan bir paraboldur.

26. $y = xy' - y'^3$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Clairaut denklemi olup $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$y = px - p^3$$

denklemi elde edilir. Her iki tarafın diferansieli alınır ve $dy = p\,dx$ olduğu göz önüne alınırsa:

$$dy = x\,dp + p\,dx - 3p^2\,dp$$

$$p\,dx = x\,dp + p\,dx - 3p^2\,dp$$

$$0 = x\,dp - 3p^2\,dp$$

$$dp(x - 3p^2) = 0$$

elde edilir ki buradan da:

I. $dp = 0$, $p = c$ olup denklemde yerine konursa:

$$y = cx - c^3 \quad \text{(doğru ailesi)}$$

II. $x - 3p^2 = 0$ veya $p = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$ olup denklemde yerine konursa:

$$y = x\sqrt{\frac{x}{3}} - \frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}$$

çözümleri elde edilir.

27. $y = 2xy' + y'^2$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Lagrange denklemi olup $\frac{dy}{dx} = y' = p$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$y = 2px + p^2$$

elde edilir. Her iki tarafın diferansielleri eşitlenir ve $dy = p\,dx$ olduğu gözönünde tutulursa:

$$dy = 2p\,dx + 2x\,dp + 2p\,dp$$

$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp + 2p\,dp$$

$$p\,dx + 2x\,dp + 2p\,dp = 0$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p} = -2$$

lineer denklemine varılır. Buradan:

$$x = \frac{c}{p^2} - \frac{2p}{3} = \frac{3c - 2p^3}{3p^2}$$

ve

$$y = 2xp + p^2 = \frac{6cp - p^4}{3p^2}$$

elde edilir ki bu ikisinden p yok edilirse $y = f(x)$ denklemi elde edilir.

28. $x\frac{dy}{dx} + y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Lagrange denklemi olup $\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$px + y = p^3$$

elde edilir. Her iki tarafın diferansielleri eşitlenir ve $dy = p\,dx$ olduğu göz önünde tutulursa:

$$p\,dx + x\,dp + dy = 3p^2\,dp$$

$$p\,dx + x\,dp + p\,dx = 3p^2\,dp$$

$$x\,dp + 2p\,dx = 3p^2\,dp$$

$$2p\frac{dx}{dp} + x = 3p^2$$

lineer diferansiel denklemine varılır. Buradan:

$$x = Kp^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{5}p^2$$

elde edilip $y + px = p^3$ denkleminde yerine konursa :

$$y = -K p^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} p^3$$

ve x ve y ifadelerinden p yok edilirse aranan $y = f(x)$ denklemi bulunur.

29. $\frac{d^2y}{dx^2} = x e^x - e^x$ *diferansiel denklemini çözünüz*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x e^x - e^x$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = x e^x\, dx - e^x\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int x e^x\, dx - \int e^x\, dx + c_1$$

$$= x e^x - \int e^x\, dx - e^x + c_1$$

$$= x e^x - e^x - e^x + c_1$$

$$= x e^x - 2 e^x + c_1$$

ve bir daha integral alınarak :

$$y = \int x e^x\, dx - 2\int e^x\, dx + c_1 \int dx + c_2$$

$$= x e^x - e^x - 2 e^x + c_1 x + c_2$$

$$= x e^x - 3 e^x + c_1 x + c_2$$

bulunur.

30 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{y^3}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

Her iki tarafı $2\frac{dy}{dx}dx$ ile çarparak :

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\, dx = \frac{a}{y^3}\, 2\, dy$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2a}{y^3}\, dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2a\int\frac{dy}{y^3} = -\frac{a}{y^2} + c_1$$

elde edilir. Buradan da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{c_1 y^2 - a}}{y}$$

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{c_1 y^2 - a}}$$

olarak

$$x + k = \int\frac{y\,dy}{\sqrt{c_1 y^2 - a}} = \frac{1}{c_1}\sqrt{c_1 y^2 - a}$$

$$(c_1 x + c_2)^2 = c_1 y^2 - a$$

$$c_1 y^2 = (c_1 x + c_2)^2 + a$$

sonucuna varılır.

31. $\frac{d^2y}{dx^2} = tg^3 y + tg\, y$ *diferansiel denkleminin* $x = \frac{\pi}{2}$ *için* $y = 0$ *ve* $\frac{dy}{dx} = 1$ *olması halindeki çözümünü bulunuz.*

Denklemin heriki tarafını $2.\frac{dy}{dx}dx$ ile çarparak:

$$2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}dx = (\text{tg}^3 y + \text{tg}\, y)\,2\,.\frac{dy}{dx}dx$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2(\text{tg}^3 y + \text{tg}\, y)\,dy$$

ve

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int \text{tg}\, y(\text{tg}^2 y + 1)\,dy$$

$$= \text{tg}^2 y + C$$

elde edilir. Buradan da:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\text{tg}^2 y + C}$$

bulunur. $x = \frac{\pi}{2}$ için $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$ olup $C = 1$ elde edileceğinden:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\mathrm{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{\cos y}$$

$$dx = \cos y \, dy \quad , \quad x = \sin y + K$$

ve $x = \frac{\pi}{2}$ için $y = 0$ olup $k = \frac{\pi}{2}$ elde edilerek :

$$x = \sin y + \frac{\pi}{2} \quad \text{veya} \quad x - \frac{\pi}{2} = \sin y$$

bulunur.

32. $x \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ olarak denklem :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{x}$$

şeklini alır. Buradan da :

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{x} \quad , \quad \log(p + \sqrt{1+p^2}) = \log cx$$

$$\sqrt{1+p^2} = cx - p \, , \quad 1 + p^2 = c^2x^2 - 2cxp + p^2$$

$$p = \frac{c^2x^2 - 1}{2cx} = \frac{c}{2} x - \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{2} x - \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{c}{4} x^2 - \frac{1}{2c} \log x + k$$

bulunur.

33. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \mathrm{tg}\, x = \sin 2x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ olarak :

$$\frac{dp}{dx} + p \operatorname{tg} x = \sin 2x$$

lineer diferansiel denklemine varılır. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü :

$$\frac{dp}{dx} + p \operatorname{tg} x = 0 \quad , \quad \frac{dp}{p} + \operatorname{tg} x \, dx = 0$$

$$\log p - \log \cos x = \log c$$

$$\log p = \log (c \cos x)$$

$$p = c \cos x$$

dir. Şimdi de bu ifadenin, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dc}{dx} \cos x - c \sin x$$

olup p ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konulursa

$$\frac{dc}{dx} \cos x - c \sin x + c \sin x = \sin 2x$$

$$dc = 2 \sin x \, dx$$

$$c = -2 \cos x + K_1$$

elde edilir. c nin bu değeri p ifadesinde yerine konursa :

$$p = \frac{dy}{dx} = -2 \cos^2 x + K_1 \cos x = K_1 \cos x - \cos 2x - 1$$

ve

$$y = K_2 + K_1 \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - x$$

bulunur.

34. $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = x \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$\dfrac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ olarak denklem :

$$p + \sqrt{x^2 + p^2} = x \frac{dp}{dx}$$

şeklini alır ki bu da homojen tip'de bir diferansiel denklemdir. $p = ux$ dönüştürmesi yapılırsa $\frac{dp}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ olarak:

$$ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2} = x\left(x\frac{du}{dx} + u\right)$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = x\frac{du}{dx} + u$$

$$\sqrt{1+u^2} = x\frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\log\frac{x}{c} = \log(u + \sqrt{1+u^2})$$

$$\frac{x}{c} = u + \sqrt{1+u^2} = \frac{p}{x} + \sqrt{1 + \frac{p^2}{x^2}}$$

$$\frac{x^2}{c} = p + \sqrt{x^2+p^2} \quad , \quad \frac{x^2}{c} - p = \sqrt{x^2+p^2}$$

$$\frac{x^4}{c^2} + p^2 - \frac{2p}{c}x^2 = x^2 + p^2$$

$$\frac{x^4}{c^2} - x^2 = \frac{2p}{c}x^2 \quad , \quad \frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{c^2} - 1\right) = p$$

bulunur. Buradan da:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{c}{2}\left(\frac{x^2}{c^2} - 1\right)$$

$$y = \frac{c}{2}\int\left(\frac{x^2}{c^2} - 1\right)dx + K$$

$$y = \frac{c}{2}\left[\frac{x^3}{3c^2} - x\right] + K$$

$$y = \frac{1}{6c}x^3 - \frac{c}{2}x + K$$

bulunur.

35. *$(x+1)\frac{d^2y}{dx^2} = (x+2)\frac{dy}{dx}$ diferansiel denkleminin $x = 0$ için $\frac{dy}{dx} = 3$ ve $y = 1$ olması halindeki çözümünü bulunuz.*

$\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ olarak denklem :

$$(x+1)\frac{dp}{dx} = (x+2)\,p$$

şeklini alır. Buradan da :

$$\frac{dp}{p} = \frac{x+2}{x+1}\,dx = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\log \frac{p}{c} = x + \log(x+1)$$

$$\frac{p}{c} = e^{x+\log(x+1)} = e^x\, e^{\log(x+1)}$$

$$p = c(x+1)\,e^x = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = c(x+1)\,e^x\,dx$$

$$y = c\int(x+1)\,e^x\,dx = c\,x\,e^x + \mathrm{K}$$

bulunur. $x = 0$ için $\frac{dy}{dx} = 3$ ve $y = 1$ olduğuna göre $\mathrm{K} = 1$ ve $c = 3$ olup :

$$y = 3x\,e^x + 1$$

dir.

36. $\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = R$ *diferansiel denklemini çözünüz. (Problem, eğrilik yarıçapları sabit ve R e eşit olan eğrilerin denklemini belirtiniz şeklinde de ifade edilebilir.)*

$y' = \frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa denklem :

$$\frac{(1+p^2)^{3/2}}{p'} = \mathrm{R}$$

şeklini alır. Buradan da ;

$$\frac{dp}{(p^2+1)^{3/2}} = \frac{dx}{\mathrm{R}}$$

ve

$$x = R\int \frac{dp}{(p^2+1)^{3/2}} + C$$

$$\frac{x-C}{R} = \int \frac{dp}{(p^2+1)^{3/2}}$$

elde edilir. $p = \operatorname{tg} u$ dönüştürmesi ile ikinci taraftaki integral hesaplanarak:

$$\frac{x-C}{R} = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$$

$$\frac{(x-C)^2}{R^2} = \frac{p^2}{p^2+1}$$

$$\frac{(x-C)^2}{R^2-(x-C)^2} = p^2$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x-C}{\mp\sqrt{R^2-(x-C)^2}}$$

$$y = \int \frac{(x-C)\,dx}{\pm\sqrt{R^2-(x-C)^2}}$$

$$y = \mp\sqrt{R^2-(x-C)^2} + K$$

$$(y-K)^2 = R^2-(x-C)^2$$

$$(x-C)^2+(y-K)^2 = R^2$$

bulunur.

37. $y\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$\dfrac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$ olarak:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 + p^3 = 0$$

$$y\frac{dp}{dy} - p + p^2 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = -\frac{p^2}{y}$$

şeklinde Bernoulli tipi bir diferansiel denkleme varılır. Burada da $p^{-1} = z$ dönüştürmesi yapılırsa $-p^{-2}\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{dz}{dy}$ olarak :

$$\frac{dz}{dy} + \frac{z}{y} = \frac{1}{y}$$

lineer denklemi elde edilir. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü :

$$\frac{dz}{dy} + \frac{z}{y} = 0 \quad , \quad \frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\log zy = \log c \quad , \quad zy = c \quad , \quad z = \frac{c}{y}$$

dir. Şimdi de bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}\frac{dc}{dy} - \frac{c}{y^2}$$

olup z ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$\frac{1}{y}\frac{dc}{dy} - \frac{c}{y^2} + \frac{c}{y^2} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dc}{dy} = 1 \quad , \quad c = y + \mathrm{K}$$

ve

$$z = \frac{y+\mathrm{K}}{y} = \frac{1}{p}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y+\mathrm{K}}$$

$$dx = \frac{y+\mathrm{K}}{y}\,dy$$

$$x + \mathrm{C} = y + \mathrm{K}\log y$$

bulunur.

37. $y\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y^4$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$\frac{dy}{dx} = p$ dönüştürmesi yapılırsa $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ olarak :

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4$$

$$\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y} = \frac{y^3}{p}$$

şeklinde Bernoulli tipi bir diferansiel denkleme varılır. Burada $p^2 = z$ dönüştürmesi yapılırsa $2p\frac{dp}{dy} = \frac{dz}{dy}$ olarak :

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = y^3$$

lineer denklemi elde edilir. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü :

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = 0 \quad , \quad \frac{dz}{z} - 2\frac{dy}{y} = 0$$

$$\log z - 2\log y = \log c \quad , \quad \frac{z}{y^2} = c \quad , \quad z = cy^2$$

dir. Şimdi de bu ifadenin, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için c nin nasıl bir $c(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dc}{dy}y^2 + 2yc$$

olup z ile birlikte ikinci taraflı denklemde yerlerine konursa :

$$\frac{1}{2}\frac{dc}{dy}y^2 + cy - cy = y^3$$

$$\frac{dc}{dy} = 2y$$

$$c = y^2 + K^2$$

$$z = y^2(y^2 + K^2) = p^2$$

$$p = y\sqrt{y^2 + K^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{y\sqrt{y^2+K^2}}$$

$$x+C=\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2+K^2}}$$

$$=-\frac{1}{K}\log\left(\frac{K}{y}+\sqrt{1+\frac{K^2}{y^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{K}\log\frac{K+\sqrt{y^2+K^2}}{y}$$

$$=-\frac{1}{K}\log\frac{y}{\sqrt{y^2+K^2}-K}$$

$$x+C=\frac{1}{K}\log\frac{\sqrt{y^2+K^2}-K}{y}$$

bulunur.

38. $y''-y'+y=x^3+6$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^2-r+1=0$$

ve bu denklemin kökleri :

$$r=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1=e^{x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

dir. İkinci taraflı denklemin özel çözümü :

$$y_2=ax^3+bx^2+cx+d$$

şeklinde olup a, b, c, d yi belirtmek üzere türevler alınırsa .

$$y_2'=3ax^2+2bx+c$$

$$y_2''=6ax+2b$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konursa :

$$6ax+2b-3ax^2-2bx-c+ax^3+bx^2+cx+d\equiv x^3+6$$

$$ax^3+(b-3a)x^2+(6a-2b+c)x+2b-c+d\equiv x^3+6$$

$$a=1\,,\quad b=3\,,\quad c=0\,,\quad d=0$$

bulunarak :

$$y_2 = x^3 + 3x^2$$

elde edilir.

Bunlara göre verilen denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = e^{x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + x^3 + 3x^2$$

dir.

39. $y'' - 6y' + 9y = 7e^{3x} + \sin x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

ve bu denklemin kökleri ; $r = 3$ (iki katlı) olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1 = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$$

dir. İkinci taraflının $7e^{3x}$ den ötürü olan özel çözümü :

$$y_2 = K x^2 e^{3x}$$

seklinde olup K yı belirtmek üzere türevler alınır ve diferansiel denklemi sağlama şartı yazılırsa :

$$y_2' = 3K x^2 e^{3x} + 2Kx e^{3x} = K e^{3x}(3x^2 + 2x) ;$$

$$y_2'' = K e^{3x}(9x^2 + 12x + 2) ;$$

$$K e^{3x}(9x^2 + 12x + 2) - 6Ke^{3x}(3x^2 + 2x) + 9Kx^2 e^{3x} = 7e^{3x}$$

$$2Ke^{3x} = 7e^{3x}$$

$$2K = 7 \ , \quad K = \frac{7}{2}$$

ve

$$y_2 = \frac{7}{2} x^2 e^{3x}$$

bulunur.

İkinci taraflının $\sin x$ den ötürü olan özel çözümü ise :

$$y_3 = A \cos x + B \sin x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_3' = -A\sin x + B\cos x$$
$$y_3'' = -A\cos x - B\sin x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konursa:

$$-A\cos x - B\sin x + 6A\sin x - 6B\cos x + 9A\cos x + 9B\sin x = \sin x$$
$$(8A - 6B)\cos x + (6A + 8B)\sin x = \sin x$$
$$8A - 6B = 0\,, \qquad 6A + 8B = 1$$
$$A = \frac{3}{50}\,, \qquad B = \frac{2}{25}$$

bulunarak:

$$y_3 = \frac{1}{50}(3\cos x + 4\sin x)$$

bulunur.

Bunlara göre verilen denklemin genel çozümü:

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$
$$y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \frac{7}{2}x^2e^{3x} + \frac{1}{50}(3\cos x + 4\sin x)$$

dir.

40. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 8y = 4x^2 - 15\cos 3x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsıza ait karakteristik denklem:

$$r^2 - 4r + 8 = 0$$

ve kökleri: $r = 2 \pm 2i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y_1 = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

dir. İkinci taraflı denklemin $4x^2$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = ax^2 + bx + c$$

şeklinde olup a, b, c yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_2' = 2ax + b$$
$$y_2'' = 2a$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konursa:

$$2a - 8ax - 4b + 8ax^2 + 8bx + 8c = 4x^2$$

$$8ax^2 + 8(b-a)x + 2a - 4b + 8c = 4x^2$$

$$8a = 4 \;, \quad b - a = 0 \;, \quad 2a - 4b + 8c = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \;, \qquad b = \frac{1}{2} \;, \qquad c = \frac{1}{8}$$

bulunarak :

$$y_2 = \frac{1}{8}(4x^2 + 4x + 1)$$

elde edilir.

İkinci taraflı denklemin $-15\cos 3x$ den ötürü olan özel çözümü ise :

$$y_3 = A\cos 3x + B\sin 3x$$

şeklinde olup A, B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$$

$$y_3'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konursa :

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 12A\sin 3x - 12B\cos 3x + 8A\cos 3x + 8B\sin 3x = -15\cos 3x$$

$$(-A - 12B)\cos 3x + (12A - B)\sin 3x = -15\cos 3x$$

$$-A - 12B = -15 \quad , \qquad 12A - B = 0$$

$$A = \frac{3}{29} \;, \quad B = \frac{36}{29}$$

bulunarak :

$$y_3 = \frac{3}{29}(\cos 3x + 12\sin 3x)$$

elde edilir.

Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{8}(4x^2 + 4x + 1) + \frac{3}{29}(\cos 3x + 12\sin 3x)$$

dir.

41. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + e^x - \sin 2x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

ve kökleri $r = 1$, $r = 2$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü ;

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

dir. İkinci taraflı denklemin x^2 den ötürü olan özel çözümü :

$$y_2 = ax^2 + bx + c$$

şeklinde olup a, b, c yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = 2ax + b$$

$$y_2'' = 2a$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konursa :

$$2ax^2 + (-6a + 2b)x + (2a - 3b + 2c) \equiv x^2$$

$$2a = 1 \quad , \quad -6a + 2b = 0 \quad , \quad 2a - 3b + 2c = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \, , \qquad b = \frac{3}{2} \, , \qquad c = \frac{7}{4}$$

bulunarak :

$$y_2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

elde edilir.

İkinci taraflı denklemin e^x den ötürü olan özel çözümü de :

$$y_3 = K\,x\,e^x$$

şeklinde olup K yı belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = K\,x\,e^x + K\,e^x$$

$$y_3'' = K\,x\,e^x + 2Ke^x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konursa:

$$K\,x\,e^x + 2K\,e^x - 3K\,x\,e^x - 3K\,e^x + 2K\,x\,e^x \equiv e^x$$

$$-K\,e^x = e^x$$

$$K = -1$$

olarak :

$$y_3 = -x\,e^x$$

bulunur.

İkinci taraflı denklemin $-\sin 2x$ den ötürü olan özel çözümü ise :

$$y_4 = A \sin 2x + B \cos 2x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_4' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$
$$y_4'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulura:

$$(-2A + 6B) \sin 2x + (-6A - 2B) \cos 2x \equiv -\sin 2x$$
$$-2A + 6B = -1 \;, \quad -6A - 2B = 0$$
$$A = \frac{1}{20} \;, \quad B = -\frac{3}{20}$$

olarak

$$y_4 = \frac{1}{20} (\sin 2x - 3 \cos 2x)$$

bulunur

Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{7}{4} - x e^x + \frac{1}{20} (\sin 2x - 3 \cos 2x)$$

dir

42. $y'' + 2y' + y = x^3 + 3e^{2x} - 2e^{-x} + \cos x$ *diferansiel denklemini çözünüz*

İkıncı tarafsız denklemin karakteristik denklemi:

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

ve kökü ikı katlı olarak $r = -1$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y_1 = (C_1 x + C_2) e^{-x}$$

dir İkinci taraflı denklemin x^3 den ötürü olan özel çözümü;

$$y_2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

şeklınde olup a, b, c, d yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_2' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y_2'' = 6ax + 2b$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b + c)x + 2b + 2c + d \equiv x^3$$

$$a = 1 \ . \quad 6a + b = 0 \ , \quad 6a + 4b + c = 0 \ , \quad 2b + 2c + d = 0$$

$$a = 1 \ , \quad b = -6 \ , \quad c = 18 \ , \quad d = -24$$

olarak :

$$y_2 = x^3 - 6x^2 + 18x - 24$$

bulunur. İkinci taraflı denklemin $3e^{2x}$ den ötürü olan özel çözümü de :

$$y_3 = K e^{2x}$$

şeklinde olup K yı belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = 2K e^{2x} \quad , \quad y_3'' = 4K e^{2x}$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$4K e^{2x} + 4K e^{2x} + K e^{2x} = 3 e^{2x}$$

$$9K e^{2x} = 3 e^{2x} \quad \text{ve} \quad K = \frac{1}{3}$$

olarak :

$$y_3 = \frac{1}{3} e^{2x}$$

dir. İkinci taraflı denklemin $-2e^{-x}$ den ötürü olan çözümü ise:

$$y_4 = K x^2 e^{-x}$$

şeklinde olup K yı belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_4' = 2Kx e^{-x} - K x^2 e^{-x}$$

$$y_4'' = 2K e^{-x} - 4K x e^{-x} + K x^2 e^{-x}$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$2K e^{-x} - 4K x e^{-x} + Kx^2 e^{-x} + 4K x e^{-x} - 2K x^2 e^{-x} + K x^2 e^{-x} = -2 e^{-x}$$

$$2 K e^{-x} = -2 e^{-x}$$

$$K = -1$$

bulunarak :

$$y_4 = - x^2 e^{-x}$$

dir. Nihayet ikinci taraflının $\cos x$ den ötürü olan özel çözümü de :

$$y_5 = A \sin x + B \cos x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_5' = A \cos x - B \sin x$$

$$y_5'' = - A \sin x - B \cos x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$-A\sin x - B\cos x + 2A\cos x - 2B\sin x + A\sin x + B\cos x = \cos x$$

$$-2B\sin x + 2A\cos x = \cos x$$

$$-2B = 0\ , \qquad 2A = 1$$

$$B = 0\ , \qquad A = \frac{1}{2}$$

bulunarak :

$$y_5 = \frac{1}{2}\sin x$$

elde edilir. Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

$$y = (C_1x + C_2)e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 24 + \frac{1}{3}e^{2x} - x^2e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$$

dir.

43. $y'' + 4y = 2\cos x\cos 3x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$$y'' + 4y = 2\cos x\cos 3x = \cos 4x + \cos 2x$$

yazılabilir. Buna göre ikinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^2 + 4 = 0$$

ve kökleri $r = \mp 2i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü;

$$y_1 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$$

dir. İkinci taraflı denklemin $\cos 4x$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = A\cos 4x + B\sin 4x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$$

$$y_2'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x + 4A\cos 4x + 4B\sin 4x = \cos 4x$$

$$-12A\cos 4x - 12B\sin 4x = \cos 4x$$

$$-12A = 1\ , \qquad -12B = 0$$

$$A = -\frac{1}{12}, \quad B = 0$$

olarak :

$$y_2 = -\frac{1}{12}\cos 4x$$

dir. İkinci taraflı denklemin $\cos 2x$ den ötürü olan özel çözümü ise :

$$y_3 = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$$

$$y_3'' = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)$$
$$+ x(4A\cos 2x + 4B\sin 2x) = \cos 2x$$

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = \cos 2x$$

$$-4A = 0, \quad 4B = 1$$

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4}$$

olarak :

$$y_3 = \frac{1}{4}x\sin 2x$$

dir. Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{12}\cos 4x + \frac{1}{4}x\sin 2x$$

dir.

44. $y'' - 2y' + y = x^2e^x + x - 1$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$$

ve kökü iki katlı olarak $r = 1$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1 = (C_1x + C_2)e^x$$

dir. İkinci taratlı denklemin x^2e^x den ötürü olan özel çözümü :

$$y_2 = z\,e^x$$

şeklinde olup z yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = z'\,e^x + z\,e^x$$

$$y_2'' = z''e^x + 2z'\,e^x + z\,e^x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$z''\,e^x + 2z'\,e^x + z\,e^x - 2z'\,e^x - 2z\,e^x + z\,e^x = x^2\,e^x$$

$$z'' = x^2$$

ve buradan z i elde etmek için de :

$$z = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

yazılıp türevler alınır :

$$z' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$z'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

ve denklemde yerlerine konulursa :

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C \equiv x^2$$

$$12A = 1\ , \quad 6B = 0\ , \quad 2C = 0$$

$$A = \frac{1}{12}\ , \quad B = 0\ , \quad C = 0$$

$$z = \frac{1}{12}\,x^4$$

elde edilip :

$$y_2 = \frac{1}{12}\,x^4\,e^x$$

bulunur. İkinci taraflı denklemin $x - 1$ den ötürü olan özel çözümü ise :

$$y_3 = ax + b$$

şeklinde olup a, b yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = a \quad , \quad y_3'' = 0$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$-2a + ax + b \equiv x - 1$$

$$ax - 2a + b \equiv x - 1$$

$$a = 1 \quad , \quad -2a + b = -1$$

$$a = 1 \quad , \quad b = 1$$

olarak

$$y_3 = x + 1$$

dir. Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü:

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$y = (C_1 x + C_2) e^x + \frac{1}{12} x^4 e^x + x + 1$$

dir.

45. $y'' + 4y' + 3y = 6e^{-2x}(\cos 3x + \sin 3x)$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$y = e^{-2x} z$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$y' = z' e^{-2x} - 2e^{-2x} z$$

$$y'' = z'' e^{-2x} - 4z' e^{-2x} + 4z e^{-2x}$$

olarak diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$z'' e^{-2x} - 4z' e^{-2x} + 4z e^{-2x} + 4z' e^{-2x} - 8z e^{-2x} + 3z e^{-2x}$$

$$= 6e^{-2x}(\cos 3x + \sin 3x)$$

$$z'' - z = 6(\cos 3x + \sin 3x)$$

elde edilir. Bu denklemin ikinci tarafsızına ait karakteristik denklem:

$$r^2 - 1 = 0$$

ve kökleri $r = -1$ ve $r = 1$ olup ikinci tarafsıza ait genel çözüm:

$$z_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

olur. İkinci taraflı denklemin özel çözümü ise:

$$z_2 = A \cos 3x + B \sin 3x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$z_2' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$$

$$z_2'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$-9A \cos 3x - 9B \sin 3x - A \cos 3x - B \sin 3x = 6 \cos 3x + 6 \sin 3x$$

$$-10A \cos 3x - 10B \sin 3x = 6 \cos 3x + 6 \sin 3x$$

$$-10A = 6 \quad , \quad -10B = 6$$

$$A = -\frac{3}{5} \quad , \quad B = -\frac{3}{5}$$

olarak:

$$z_2 = -\frac{3}{5}(\cos 3x + \sin 3x)$$

dir. Bunlara göre z genel çözümü:

$$z = z_1 + z_2$$

$$z = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \frac{3}{5}(\cos 3x + \sin 3x)$$

olup verilen diferansiel denklemin genel çözümü:

$$y = z e^{-2x}$$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{5} e^{-2x}(\cos 3x + \sin 3x)$$

dir.

46. *$y'' - 4y' + 3y = 2x e^{3x} + 3 e^{x} \cos 2x$ diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi:

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

ve kökleri $r = 1$, $r = 3$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$$

dir.

İkinci taraflı denklemin $2x e^{3x}$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = z e^{3x}$$

şeklinde olup (z) i belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_2' = z' e^{3x} + 3z e^{3x}$$

$$y_2'' = z'' e^{3x} + 6z' e^{3x} + 9z e^{3x}$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$z'' + 2z' = 2x$$

denklemi elde edilir ki bunun da özel çözümü:

$$z = x(ax + b) = ax^2 + bx$$

şeklindedir. a ve b yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$z' = 2ax + b \quad , \quad z'' = 2a$$

ve denklemde yerlerine konulursa:

$$4ax + 2a + 2b = 2x$$

$$4a = 2 \quad , \qquad 2a + 2b = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \, , \qquad b = -\frac{1}{2}$$

olarak:

$$z = \frac{x}{2}(x-1)$$

ve

$$y_2 = \frac{1}{2} e^{3x}(x^2 - x)$$

bulunur.

İkinci taraflı denklemin $3e^x \cos 2x$ den ötürü olan özel çözümü ise:

$$y_3 = z e^x$$

şeklinde olup (z) i belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_3' = z' e^x + z e^x$$

$$y_3'' = z'' e^x + 2z' e^x + z e^x$$

ve denklemde yerlerine konulursa:

$$z'' - 2z' = 3 \cos 2x$$

elde edilir ki bunun da özel çözümü:

$$z = \mathrm{A} \sin 2x + \mathrm{B} \cos 2x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$z' = 2\mathrm{A} \cos 2x - 2\mathrm{B} \sin 2x$$

$$z'' = -4\mathrm{A} \sin 2x - 4\mathrm{B} \cos 2x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$(-4\mathrm{A} + 4\mathrm{B}) \sin 2x + (-4\mathrm{A} - 4\mathrm{B}) \cos 2x = 3 \cos 2x$$

$$-4\mathrm{A} + 4\mathrm{B} = 0 \quad , \qquad -4\mathrm{A} - 4\mathrm{B} = 3$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = -\frac{3}{8}$$

olarak:

$$z = -\frac{3}{8}(\sin 2x + \cos 2x)$$

ve

$$y_3 = -\frac{3}{8} e^x(\sin 2x + \cos 2x)$$

bulunur. Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^{3x}(x^2 - x) - \frac{3}{8} e^x(\sin 2x + \cos 2x)$$

dir.

47. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 4y = \cos 2x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r-1)(r^2+4) = 0$$

ve kökleri $r = +1$, $r = \mp 2i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

dir.

İkinci taraflı denklemin $\cos 2x$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = x(A \sin 2x + B \cos 2x)$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = A \sin 2x + B \cos 2x + x(2A \cos 2x - 2B \sin 2x)$$

$$y_2'' = 4A \cos 2x - 4B \sin 2x + x(-4A \sin 2x - 4B \cos 2x)$$

$$y_2''' = -12A \sin 2x - 12B \cos 2x + x(-8A \cos 2x + 8B \sin 2x)$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$(-8A + 4B)\sin 2x + (-4A - 8B)\cos 2x = \cos 2x$$

$$-8A + 4B = 0 \quad , \quad -4A - 8B = 1$$

$$A = -\frac{1}{20} \quad , \quad B = -\frac{2}{20}$$

olarak :

$$y_2 = -\frac{x}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

bulunur.

Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x - \frac{x}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

dir.

48. *$y''' + y'' + y' + y = \sin 2x + \cos 3x$ diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi ;

$$r^3 + r^2 + r + 1 = (r+1)(r^2+1) = 0$$

ve kökleri $r = -1$, $r = \mp i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

dir.

İkinci taraflı denklemin $\sin 2x$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = A \sin 2x + B \cos 2x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$y_2'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

$$y_2''' = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$(-3A + 6B) \sin 2x + (-6A - 3B) \cos 2x = \sin 2x$$

$$-3A + 6B = 1 \quad , \quad -6A - 3B = 0$$

$$A = -\frac{1}{15} \quad , \quad B = \frac{2}{15}$$

olarak :

$$y_2 = \frac{1}{15}(2 \cos 2x - \sin 2x)$$

dır.

İkinci taraflı denklemin $\cos 3x$ den ötürü olan özel çözümü ise :

$$y_3 = A \sin 3x + B \cos 3x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x$$

$$y_3'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x$$

$$y_3''' = -27A \cos 3x + 27B \sin 3x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$(-8A + 24B) \sin 3x + (-24A - 8B) \cos 3x = \cos 3x$$

$$-8A + 24B = 0 \quad , \quad -24A - 8B = 1$$

$$A = -\frac{3}{80}, \qquad B = -\frac{1}{80}$$

olarak :

$$y_3 = -\frac{1}{80}(3\sin 3x + \cos 3x)$$

bulunur.

Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{15}(2\cos 2x - \sin 2x) - \frac{1}{80}(3\sin 3x + \cos 3x)$$

dir.

49. $y^{(IV)} + 2y''' - 3y'' = x^2 + 3e^{2x} + 4\sin x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^4 + 2r^3 - 3r^2 = r^2(r+3)(r-1) = 0$$

ve kökleri $r = 0$ (iki katlı), $r = -3$, $r = 1$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-3x} + C_4 e^x$$

dir. İkinci taraflı denklemin x^2 den ötürü olan ozel çözümü :

$$y_2 = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

şeklinde olup a, b, c yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$$
$$y_2'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$$
$$y_2''' = 24ax + 6b$$
$$y_2^{(IV)} = 24a$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$24a + 48ax + 12b - 36ax^2 - 18bx - 6c = x^2$$
$$-36ax^2 + (48a - 18b)x + 24a + 12b - 6c = x^2$$
$$-36a = 1, \quad 48a - 18b = 0, \quad 24a + 12b - 6c = 0$$
$$a = -\frac{1}{36}, \quad b = -\frac{2}{27}, \quad c = -\frac{7}{27}$$

olarak :

$$y_2 = x^2\left(-\frac{1}{36}x^2 - \frac{2}{27}x - \frac{7}{27}\right) = -\frac{x^2}{108}(3x^2 + 8x + 28)$$

dir.

İkinci taraflı denklemin $3e^{2x}$ den ötürü olan özel çözümü de :

$$y_3 = Ke^{2x}$$

şeklinde olup K yı belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = 2Ke^{2x}, \quad y_3'' = 4Ke^{2x}, \quad y_3''' = 8Ke^{2x}, \quad y_3^{(IV)} = 16Ke^{2x}$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$16Ke^{2x} + 16Ke^{2x} - 12Ke^{2x} = 3e^{2x}$$

$$20Ke^{2x} = 3e^{2x}$$

$$K = \frac{3}{20}$$

olarak :

$$y_3 = \frac{3}{20}e^{2x}$$

bulunur. İkinci taraflı denklemin $4\sin x$ den ötürü olan özel çözümü ise :

$$y_4 = A\sin x + B\cos x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_4' = A\cos x - B\sin x$$

$$y_4'' = -A\sin x - B\cos x$$

$$y_4''' = -A\cos x + B\sin x$$

$$y_4^{(IV)} = A\sin x + B\cos x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$A\sin x + B\cos x - 2A\cos x + 2B\sin x + 3A\sin x + 3B\cos x = 4\sin x$$

$$(4A + 2B)\sin x + (-2A + 4B)\cos x = 4\sin x$$

$$4A + 2B = 4, \quad -2A + 4B = 0$$

$$A = \frac{4}{5}, \quad B = \frac{2}{5}$$

olarak :

$$y_4 = \frac{2}{5}(2\sin x + \cos x)$$

bulunur.

Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-3x} - \frac{x^2}{108}(3x^2 + 8x + 28) +$$

$$\frac{3}{20} e^{2x} + \frac{2}{5}(2\sin x + \cos x)$$

dir.

50. $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 36y = 20e^{2x}\cos 3x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi:

$$r^4 + 5r^2 - 36 = (r^2 - 4)(r^2 + 9) = 0$$

ve kökleri $r = -2$, $r = 2$, $r = \mp 3i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$$

dir.

İkinci taraflı denkleme ait özel çözüm:

$$y_2 = z\, e^{2x}$$

şeklinde olup (z) i belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_2' = z'\, e^{2x} + 2z\, e^{2x}$$

$$y_2'' = z''\, e^{2x} + 4z'\, e^{2x} + 4z\, e^{2x}$$

$$y_2''' = z'''\, e^{2x} + 6z''\, e^{2x} + 12z'\, e^{2x} + 8z\, e^{2x}$$

$$y_2^{(IV)} = z^{(IV)} e^{2x} + 8z'''\, e^{2x} + 24z''\, e^{2x} + 32z'\, e^{2x} + 16z\, e^{2x}$$

elde edilir ki bunlar da diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$z^{IV} e^{2x} + 8z''' e^{2x} + 24z'' e^{2x} + 32z' e^{2x} + 16z\, e^{2x} + 5z'' e^{2x} + 20z' e^{2x} +$$

$$20z\, e^{2x} - 36z\, e^{2x} = 20\, e^{2x} \cos 3x$$

$$z^{IV} + 8z''' + 29z'' + 52z' = 20 \cos 3x$$

diferansiel denklemine varılır. Bu denkleme ait özel çözüm ise:

$$z = A \cos 3x + B \sin 3x$$

şeklinde olacağından A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$z' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$$

$$z'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$$

$$z''' = 27A \sin 3x - 27B \cos 3x$$

$$z^{IV} = 81A \cos 3x + 81B \sin 3x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$81A \cos 3x + 81B \sin 3x + 216A \sin 3x - 216B \cos 3x - 261A \cos 3x -$$
$$261B \sin 3x - 156A \sin 3x + 156B \cos 3x \equiv 20 \cos 3x$$

$$(-180A - 60B) \cos 3x + (60A - 180B) \sin 3x \equiv 20 \cos 3x$$

$$-180A - 60B = 20 \quad , \quad 60A - 180B = 0$$

$$A = -\frac{1}{10} \quad , \quad B = -\frac{1}{30}$$

bulunarak :

$$z = -\frac{1}{30}(3 \cos 3x + \sin 3x)$$

ve

$$y_2 = -\frac{e^{2x}}{30}(3 \cos 3x + \sin 3x)$$

elde edilir.

İkinci taraflı diferansiel denkleme ait genel çözüm ise :

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x - \frac{e^{2x}}{30}(3 \cos 3x + \sin 3x)$$

dir.

51. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 5 \sin 2x + 12\, x\, e^{2x}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = (r + 2)(r + 1)(r - 1) = 0$$

ve kökleri $r = -2$, $r = -1$, $r = 1$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}$$

dir. İkinci taraflı denklemin $5 \sin 2x$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = A \sin 2x + B \cos 2x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$y_2'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

$$y_2''' = -8A\cos 2x + 8B\sin 2x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$-8A\cos 2x + 8B\sin 2x - 8A\sin 2x - 8B\cos 2x - 2A\cos 2x + 2B\sin 2x - 2A\sin 2x - 2B\cos 2x \equiv 5\sin 2x$$

$$(-10A + 10B)\sin 2x + (-10A - 10B)\cos 2x = 5\sin 2x$$

$$-10A + 10B = 5 \ , \qquad -10A - 10B = 0$$

$$A = -\frac{1}{4} \ , \qquad B = \frac{1}{4}$$

bulunarak :

$$y_2 = \frac{1}{4}(\cos 2x - \sin 2x)$$

elde edilir.

İkinci taraflı denklemin $12x\,e^{2x}$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_3 = e^{2x} z$$

şeklinde olup (z) i belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_3' = z' e^{2x} + 2z\,e^{2x}$$

$$y_3'' = z'' e^{2x} + 4\,z' e^{2x} + 4\,z\,e^{2x}$$

$$y_3''' = z''' e^{2x} + 6\,z'' e^{2x} + 12\,z' e^{2x} + 8\,z\,e^{2x}$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$z''' e^{2x} + 6\,z'' e^{2x} + 12\,z' e^{2x} + 8\,z\,e^{2x} + 2\,z'' e^{2x} + 8\,z' e^{2x} + 8\,z\,e^{2x} - z' e^{2x} - 2\,z\,e^{2x} - 2\,z\,e^{2x} = 12\,x\,e^{2x}$$

$$z''' + 8\,z'' + 19\,z' + 12\,z = 12\,x$$

elde edilir ki bunun da ikinci taraftan olan özel çözümü :

$$z = ax + b$$

şeklinde olup a ve b yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$z' = a \ , \qquad z'' = 0 \ , \qquad z''' = 0$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa .

$$19a + 12ax + 12b \equiv 12x$$

$$12ax + (19a + 12b) \equiv 12x$$

$$12\,a = 12 \ , \qquad 19a + 12b = 0$$

$$a = 1 \ , \qquad b = -\frac{19}{12}$$

olarak :

$$z = x - \frac{19}{12}$$

ve

$$y_3 = \frac{e^{2x}}{12}(12x - 19)$$

bulunur.

Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü :

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{x} + \frac{1}{4}(\cos 2x - \sin 2x) + \frac{e^{2x}}{12}(12x - 19)$$

dir.

52. $\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} = 4\cos 4x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^4 + 4r^3 = r^3(r + 4) = 0$$

ve kökleri $r = 0$ (üç katlı), $r = -4$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü :

$$y_1 = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-4x}$$

dir.

İkinci taraflı denklemin özel çözümü ise :

$$y_2 = A\cos 4x + B\sin 4x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa :

$$y_2' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$$

$$y_2'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

$$y_2''' = 64A\sin 4x - 64B\cos 4x$$

$$y_2^{IV} = 256A\cos 4x + 256B\sin 4x$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa :

$$256A\cos 4x + 256B\sin 4x + 256A\sin 4x - 256B\cos 4x = 4\cos 4x$$

$$(256A - 256B)\cos 4x + (256A + 256B)\sin 4x = 4\cos 4x$$

$$256A - 256B = 4 \quad , \quad 256A + 256B = 0$$

$$A = \frac{1}{128} \quad , \quad B = -\frac{1}{128}$$

bulunarak

$$y_2 = \frac{1}{128}(\cos 4x - \sin 4x)$$

elde edilir.

Bunlara göre ikinci taraflı denklemin genel çözümü:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-4x} + \frac{1}{128}(\cos 4x - \sin 4x)$$

dir.

53. $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 25e^{-x}\sin 2x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi:

$$r^4 + 2r^2 = r^2(r^2 + 2) = 0$$

ve kökleri $r = 0$ (iki katlı), $r = \mp\sqrt{2}\,i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y_1 = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\sqrt{2}\,x + C_4 \sin\sqrt{2}\,x$$

dir.

İkinci taraflı denklemin $2x$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = x^2(ax + b) = ax^3 + bx^2$$

şeklinde olup a ve b yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_2' = 3ax^2 + 2bx \quad , \quad y_2'' = 6ax + 2b$$

$$y_2''' = 6a \quad , \quad y_2^{IV} = 0$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$12ax + 4b = 2x$$

$$12a = 2 \quad , \quad 4b = 0$$

$$a = \frac{1}{6} \quad , \quad b = 0$$

olarak;

$$y_2 = \frac{x^3}{6}$$

bulunur.

İkinci taraflı denklemin $25e^{-x}\sin 2x$ den ötürü olan özel çözümü de:

$$y_3 = z\,e^{-x}$$

şeklinde olup (z) i belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_3' = e^{-x} z' - e^{-x} z$$

$$y_3'' = e^{-x} z'' - 2 e^{-x} z' + e^{-x} z$$

$$y_3''' = e^{-x} z''' - 3 e^{-x} z'' + 3 e^{-x} z' - e^{-x} z$$

$$y_3^{IV} = e^{-x} z^{IV} - 4 e^{-x} z''' + 6 e^{-x} z'' - 4 e^{-x} z' + e^{-x} z$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$e^{-x} z^{IV} - 4 e^{-x} z''' + 6 e^{-x} z'' - 4 e^{-x} z' + e^{-x} z + 2 e^{-x} z'' - 4 e^{-x} z' + 2 e^{-x} z = 25 e^{-x} \sin 2x$$

$$z^{IV} - 4 z''' + 8 z'' - 8 z' + 3 z = 25 \sin 2x$$

elde edilir ki bunun da ikinci taraftan olan özel çözümü:

$$z = A \sin 2x + B \cos 2x$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$z' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$$

$$z'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

$$z''' = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x$$

$$z^{IV} = 16A \sin 2x + 16B \cos 2x$$

bulunarak diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$16A \sin 2x + 16B \cos 2x + 32A \cos 2x - 32B \sin 2x - 32A \sin 2x - 32B \cos 2x - 16A \cos 2x + 16B \sin 2x + 3A \sin 2x + 3B \cos 2x = 25 \sin 2x$$

$$(-13A - 16B) \sin 2x + (16A - 13B) \cos 2x = 25 \sin 2x$$

$$-13A - 16B = 25 \quad , \quad 16A - 13B = 0$$

$$A = -\frac{13}{17} \quad , \quad B = -\frac{16}{17}$$

olarak:

$$z = -\frac{1}{17} (13 \sin 2x + 16 \cos 2x)$$

ve

$$y_3 = -\frac{e^{-x}}{17} (13 \sin 2x + 16 \cos 2x)$$

bulunur.

Bunlara göre verilen diferansiel denklemin genel çözümü:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos \sqrt{2}\, x + C_4 \sin \sqrt{2}\, x + \frac{x^3}{6} - \frac{e^{-x}}{17}(13 \sin 2x + 16 \cos 2x)$$

dir.

54. $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi;

$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$$

ve kökleri $r = 3$ (iki katlı) olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x}$$

dir. Bu ifadenin, ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için C_1 ve C_2 nin ne şekilde fonksiyonlar olması gerektiğini bulmak üzere sabitin değişimi (Lagrange) kuralını uygulayalım;

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

$$y' = 3C_1 e^{3x} + (e^{3x} + 3x e^{3x})\, C_2 + C_1' e^{3x} + C_2' x e^{3x}$$

olup bütünler şart olarak;

$$C_1' e^{3x} + C_2' x e^{3x} = 0 \qquad (1)$$

olmasını kabul edelim. Buna göre;

$$y' = 3C_1 e^{3x} + (e^{3x} + 3x e^{3x})\, C_2$$

olarak:

$$y'' = 9C_1 e^{3x} + [3e^{3x} + (1+3x)\, 3e^{3x}]\, C_2 + 3C_1' e^{3x} + (1+3x)\, e^{3x} C_2'$$

dir. Bu türevler diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$3C_1' + (1+3x)\, C_2' = \frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerinden:

$$C_2' = \frac{1}{x^2} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{x} + K_1$$

ve

$$C_1' = -x C_2' = -\frac{1}{x}$$

$$C_1 = -\log x + K_2$$

bulunarak :

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$$

$$y = (-\log x + K_2 - 1 + K_1 x) e^{3x}$$

$$y = K_1 x e^{3x} + K_2 e^{3x} - e^{3x} \log x$$

elde edilir.

55. $y'' - 4y' + 3y = \frac{e^x}{1+e^x}$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi:

$$r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3) = 0$$

ve kökleri $r = 1$, $r = 3$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$$

dir. Şimdi, bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için C_1 ve C_2 nin ne şekilde fonksiyonlar olması gerektiğini bulmak üzere sabitin değişimi kuralını uygulayalım:

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} + C_1' e^x + C_2' e^{3x}$$

olup bütünler şart olarak:

$$C_1' e^x + C_2' e^{3x} = 0 \qquad (1)$$

olmasını kabul edelim. Buna göre:

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$$

olarak:

$$y'' = C_1 e^x + 9C_2 e^{3x} + C_1' e^x + 3C_2' e^{3x}$$

dır. Bu türevler diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$C_1 e^x + 9C_2 e^{3x} + C_1' e^x + 3C_2' e^{3x} - 4C_1 e^x - 12C_2 e^{3x} + 3C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$C_1' e^x + 3C_2' e^{3x} = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerinden:

$$2\,C_2'\,e^{3x} = \frac{e^x}{1+e^x}\,, \qquad C_2' = \frac{1}{2\,e^{2x}(1+e^x)}$$

$$2\,C_1'\,e^x = \frac{-\,e^x}{1+e^x}\,, \qquad C_1' = \frac{-\,1}{2\,(1+e^x)}$$

ve bunlardan :

$$C_1' = \frac{-\,e^{-x}}{2(e^{-x}+1)}\,, \qquad C_1 = \frac{1}{2}\log(e^{-x}+1) + K_1$$

$$C_2' = \frac{e^{-2x}}{2(1+e^x)} = \frac{e^{-3x}}{2(e^{-x}+1)} = \frac{1}{2}\left[e^{-2x} - e^{-x} + \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right]$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2x} + e^{-x} - \log(e^{-x}+1)\right] + K_2$$

elde edilerek yerlerine konulursa :

$$y = \frac{1}{2}\,e^x \log(e^{-x}+1) + K_1\,e^x + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\,e^x + e^{2x} - e^{3x}\log(e^{-x}+1)\right] + K_2\,e^{3x}$$

$$y = K_1\,e^x + K_2\,e^{3x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,e^x + \frac{1}{2}\,(e^x - e^{3x})\log(1+e^{-x})$$

elde edilir.

56. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\,sec^2\,2x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

İkinci tarafsız denklemin karakteristik denklemi :

$$r^2 + 4 = 0$$

ve kökleri $r = \mp\,2i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

dir. Şimdi, sabitin değişimi kuralını uygulayarak, bu ifadenin ikinci taraflı denklemin genel çözümü olabilmesi için C_1 ve C_2 nin nasıl $C_1(x)$ ve $C_2(x)$ şeklinde fonksiyonlar olması gerektiğini araştıralım :

$$y' = -\,2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x$$

olup bütünler şart olarak :

$$C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0 \qquad (1)$$

olmasını kabul edelim. Buna göre :

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$$

olarak:

$$y'' = -4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x - 2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x,$$

dir. Bu türevler diferansiel denlemde yerlerine konulursa:

$$-4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x - 2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x + 4C_1 \cos 2x + 4C_2 \sin 2x = 4 \sec^2 2x$$

$$-2C_1' \sin 2x + 2C_2' \cos 2x = 4 \sec^2 2x \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerinden:

$$C_2' = 2 \sec 2x \quad , \quad C_2 = \log(\sec 2x + \operatorname{tg} 2x) + K_2$$

$$C_1' = -2 \sec^2 2x \sin 2x \quad , \quad C_1 = -\sec 2x + K_1$$

elde edilerek yerlerine konulursa:

$$y = K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x - 1 + \sin 2x \log(\sec 2x + \operatorname{tg} 2x)$$

bulunur.

57. *$x^2y'' - xy' + 4y = \cos(\log x) + x \sin(\log x)$ diferansiel denklemini çözünüz.*

$x = e^t$ dönüştürmesi yapılırsa $\log x = t$, $\dfrac{dx}{dt} = e^t$, $\dfrac{dt}{dx} = e^{-t}$

ve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\mathrm{D}y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (e^{-t}\mathrm{D}^2y - e^{-t}\mathrm{D}y)e^{-t} = e^{-2t}(\mathrm{D}^2 - \mathrm{D})y$$

$$x^2y'' = (\mathrm{D}^2 - \mathrm{D})y \quad , \quad -xy' = -\mathrm{D}y$$

olarak:

$$(\mathrm{D}^2 - \mathrm{D} - \mathrm{D} + 4)y = \cos t + e^t \sin t$$

$$y'' - 2y' + 4y = \cos t + e^t \sin t$$

denklemine varılır. Bu denklemin ikinci tarafsızının karakteristik denklemi:

$$r^2 - 2r + 4 = 0$$

ve kökleri: $r = 1 \mp \sqrt{3}i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y_1 = e^t(C_1 \cos \sqrt{3}\,t + C_2 \sin \sqrt{3}\,t)$$

dir. İkinci taraflı denklemin $\cos t$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = A \cos t + B \sin t$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_2' = -A \sin t + B \cos t$$

$$y_2'' = -A \cos t - B \sin t$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$-A \cos t - B \sin t + 2A \sin t - 2B \cos t + 4A \cos t + 4B \sin t = \cos t$$

$$(3A - 2B) \cos t + (2A + 3B) \sin t = \cos t$$

$$3A - 2B = 1 \ , \quad 2A + 3B = 0$$

$$A = \frac{3}{13} \ , \quad B = -\frac{2}{13}$$

olarak:

$$y_2 = \frac{1}{13}(3 \cos t - 2 \sin t)$$

dir. İkinci taraflı denklemin $e^t \sin t$ den ötürü olan özel çözümü de:

$$y_3 = z\,e^t$$

şeklinde olup (z) i belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_3' = e^t z' + e^t z$$

$$y_3'' = e^t z'' + 2\,e^t z' + e^t z$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$e^t z'' + 2\,e^t z' + e^t z - 2\,e^t z' - 2\,e^t z + 4\,z\,e^t = e^t \sin t$$

$$z'' + 3\,z = \sin t$$

elde edilir ki bunun da özel çözümü:

$$z = A \sin t + B \cos t$$

şeklinde olup A ve B yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$z' = A \cos t - B \sin t$$

$$z'' = -A \sin t - B \cos t$$

bulunarak diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$-\mathrm{A}\sin t - \mathrm{B}\cos t + 3\mathrm{A}\sin t + 3\mathrm{B}\cos t = \sin t$$

$$2\mathrm{A}\sin t + 2\mathrm{B}\cos t = \sin t$$

$$2\mathrm{A} = 1 \quad , \quad 2\mathrm{B} = 0$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2} \quad , \quad \mathrm{B} = 0$$

olarak:

$$z = \frac{1}{2}\sin t$$

ve

$$y_3 = \frac{e^t}{2}\sin t$$

bulunur. Bunlara göre ikinci taraflı denklemin genel çözümü:

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$y = e^t(\mathrm{C}_1\cos\sqrt{3}\,t + \mathrm{C}_2\sin\sqrt{3}\,t) + \frac{1}{13}(3\cos t - 2\sin t) + \frac{1}{2}e^t\sin t$$

dir. $e^t = x$ ve $t = \log x$ olduğu göz önünde tutularak verilen diferansiel denklemin genel çözümü:

$$y = x(\mathrm{C}_1\cos\sqrt{3}\log x + \mathrm{C}_2\sin\sqrt{3}\log x) + \frac{1}{13}(3\cos\log x - 2\sin\log x) + \frac{1}{2}x\sin\log x$$

dir.

58. $x^3y'' + 2xy' - 2y = x^2\log x + 3x$ *diferansiel denklemini çözünüz.*

$x = e^t$ dönüştürmesi yapılırsa $\log x = t$ ve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} = e^{-t}\mathrm{D}y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} = e^{-2t}(\mathrm{D}^2 - \mathrm{D})y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = [e^{-2t}(\mathrm{D}^3 - \mathrm{D}^2)y - 2e^{-2t}(\mathrm{D}^2 - \mathrm{D})y]\,e^{-t}$$

$$= (\mathrm{D}^3 - 3\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D})\,y\,e^{-3t}$$

elde edilir. Bunlara göre, $x = e^t$ olduğu da göz önünde tutularak:

$$x^3 y''' = (D^3 - 3D^2 + 2D)y$$
$$2xy' = 2\,Dy$$
$$-2y = -2y$$

olup denklemde yerlerine konulursa:

$$(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = t\,e^{2t} + 3\,e^t$$

denklemine varılır. Bu denklemin ikinci tarafsızının karakteristik denklemi:

$$r^3 - 3r^2 + 4r - 2 = (r-1)(r^2 - 2r + 2) = 0$$

ve kökleri $r = 1$, $r = 1 \mp i$ olup ikinci tarafsız denklemin genel çözümü:

$$y_1 = C_1 e^t + e^t (C_2 \cos t + C_3 \sin t)$$

dir.

İkinci taraflı denklemin $t\,e^{2t}$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = e^{2t}\,z$$

şeklinde olup (z) i belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_2' = e^{2t} z' + 2\,e^{2t} z$$
$$y_2'' = e^{2t} z'' + 4\,e^{2t} z' + 4\,e^{2t}\,z$$
$$y_2''' = e^{2t}\,z''' + 6\,e^{2t}\,z'' + 12\,e^{2t}\,z' + 8\,e^{2t}\,z$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$z''' + 3z'' + 4\,z' + 2\,z = t$$

denklemi elde edilir ki bunun da özel çözümü:

$$z = at + b$$

şeklinde olup a ve b yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$z' = a\,, \qquad z'' = 0\,, \qquad z''' = 0$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$4a + 2at + 2b = t$$
$$2at + (4a + 2b) = t$$
$$2a = 1\,, \qquad 4a + 2b = 0$$
$$a = \frac{1}{2}\,, \qquad b = -1$$

olarak:

$$z = \frac{1}{2} t - 1$$

ve

$$y_2 = e^{2t}\left(\frac{1}{2} t - 1\right)$$

bulunur.

İkinci taraflı denklemin $3\,e^t$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_3 = K\,t\,e^t$$

şeklinde olup K yı belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$y_3' = K\,e^t + K\,t\,e^t$$
$$y_3'' = 2K\,e^t + K\,t\,e^t$$
$$y_3''' = 3K\,e^t + K\,t\,e^t$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$K\,e^t = 3\,e^t$$
$$K = 3$$

olarak

$$y_3 = 3\,t\,e^t$$

bulunur. İkinci taraflı denklemin genel çözümü ise:

$$y = y_1 + y_2 + y_3$$

$$y = C_1 x + x\,(C_2 \cos\log x + C_3 \sin\log x) + \frac{1}{2} x^2(\log x - 2) + 3x \log x$$

dir.

59. $\left.\begin{aligned} y' &= y - 5z \\ z' &= y + 7z \end{aligned}\right\}$ *diferansiel denklem sistemini çözünüz.*

$y' = y - 5z$ denklemi x e göre türetilirse:

$$y'' = y' - 5z'$$

ve bu ifadede z' yerine ikinci denklemdeki değeri yazılırsa:

$$y'' = y' - 5y - 35z$$

elde edilir. Burada z yerine de birinci denklemden elde edilecek değeri konulursa:

$$y'' = y' - 5y - 35\,\frac{y - y'}{5}$$
$$y'' = y' - 5y - 7y + 7y'$$
$$y'' - 8y' + 12y = 0$$

denklemine varılır. Bu denklemin karakteristik denklemi:

$$r^2 - 8r + 12 = 0$$

ve kökleri $r = 2$, $r = 6$ olup bu denklemin genel çözümü:

$$y = K_1 e^{6x} + K_2 e^{2x}$$

dir. Bu ifadenin türevi alınırsa:

$$y' = 6K_1 e^{6x} + 2K_2 e^{2x}$$

elde edilerek $y' = y - 5z$ denkleminde yerine konulursa:

$$6K_1 e^{6x} + 2K_2 e^{2x} = K_1 e^{6x} + K_2 e^{2x} - 5z$$
$$5z = -5K_1 e^{6x} - K_2 e^{2x}$$
$$z = C_1 e^{6x} + C_2 e^{2x}$$

bulunur.

60. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - 4y = e^{5t} \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x - 3y = e^{2t} \end{array}\right\}$ *diferansiel denklem sistemini çözünüz.*

Diferansiel denklem sistemi:

$$(D - 1)\,x + (D - 4)\,y = e^{5t}$$
$$(D - 2)\,x + (D - 3)\,y = e^{2t}$$

şeklinde yazılarak, bu denklem sisteminden y yi yok etmek üzere birinci denklemi $(D - 3)$ ve ikinci denklemi $D - 4$ ile çarpıp denklemleri taraf tarafa çıkarırsak:

$$(D^2 - 4D + 3)\,x + (D^2 - 7D + 12)\,y = (D - 3)\,e^{5t} =$$
$$5e^{5t} - 3e^{5t} = 2e^{5t}$$
$$(D^2 - 6D + 8)\,x + (D^2 - 7D + 12)\,y = (D - 4)\,e^{2t} =$$
$$2e^{2t} - 4e^{2t} = -2e^{2t}$$

ve bunlardan:

$$(D^2 - 4D + 3 - D^2 + 6D - 8)\,x = 2e^{5t} + 2e^{2t}$$

$$(2D - 5)\,x = 2\,e^{5t} + 2e^{2t}$$

elde edilir. Bu denklemden ise:

$$x = C_1\,e^{\frac{5}{2}t} + \frac{2}{5}\,e^{5t} - 2e^{2t}$$

bulunur. Ayni iş x i yok etmek üzere tekrarlanırsa:

$$(2D - 5)\,y = -3\,e^{5t} + e^{2t}$$

ve bu denklemden de:

$$y = C_2 e^{\frac{5}{2}t} - \frac{3}{5}\,e^{5t} - e^{2t}$$

bulunur. x ve y içindeki sabitler bağımsız değildir. Gerçekten x ve y nin bu değerleri diferansiel denklem sisteminde yerlerine konulursa:

$$\frac{3}{2}(C_1 - C_2)\,e^{\frac{5}{2}t} + e^{5t} = e^{5t}$$

$$\frac{1}{2}\,(C_1 - C_2)\,e^{\frac{5}{2}t} + e^{2t} = e^{2t}$$

elde edilir ki buradan da eşitliklerin sağlanabilmesi için $C_1 = C_2$ olması gerektiği görülür. Buna göre $C_1 = C_2 = C$ alınırsa diferansiel denklem sisteminin çözümü olarak:

$$x = C\,e^{\frac{5}{2}t} + \frac{2}{5}\,e^{5t} - 2e^{2t}$$

$$y = C\,e^{\frac{5}{2}t} - \frac{3}{5}\,e^{5t} - e^{2t}$$

elde edilir.

61. $$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} \\ &\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x - 2y = 3t^2 \end{aligned}\right\}$$ *diferansiel denklem sistemini çözünüz.*

Diferansiel denklem sistemi:

$$(D^2+2D)\,x+D\,y=2e^{2t}$$
$$(D+2)\,x+(D-2)\,y=3\,t^2$$

şeklinde yazılarak y yi yoketmek üzere:

$$(D-2)(D^2+2D)\,x+D\,(D-2)\,y=(D-2)\,2e^{2t}=4e^{2t}-4e^{2t}=0$$
$$D\,(D+2)\,x+D\,(D-2)\,y=D\,3t^2=6t$$

ve taraf tarafa çıkarırsak:

$$[(D-2)\,(D^2+2D)-D\,(D+2)]\,x=-6t$$
$$D\,(D+2)\,(D-3)\,x=-6t \quad ; \quad (D^3-D^2-6D)\,y=-6t$$

elde edilir. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü:

$$x_1=C_1+C_2\,e^{3t}+C_3\,e^{-2t}$$

dir. İkinci taraflıya ait özel çözüm:

$$x_2=t\,(at+b)=at^2+bt$$

şeklinde olup a ve b yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$Dx_2=2at+b \quad , \quad D^2x_2=2a \quad , \quad D^3x_2=0$$

olarak diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$0-2a-12at-6b\equiv-6t$$
$$-12at-2a-6b\equiv-6t$$
$$-12a=-6 \quad , \quad -2a-6b=0$$
$$a=\frac{1}{2} \quad , \quad b=-\frac{1}{6}$$

ve

$$x_2=\frac{1}{2}\,t^2-\frac{1}{6}\,t$$

elde edilir. Bunlara göre x genel çözümü:

$$x=C_1+C_2\,e^{3t}+C_3\,e^{-2t}+\frac{1}{2}\,t^2-\frac{1}{6}\,t$$

dir. Şimdi de y yi bulmak üzere denklem sisteminden x i yok-edelim:

$$(D^2+2D)\,x+D\,y=2e^{2t}$$
$$(D^2+2D)\,x+(D^2-2D)\,y=D\,(3t^2)=6t$$

yazılıp taraf tarafa çıkarılırsa:

$$(D^2 - 3D)\, y = 6t - 2e^{2t}$$

elde edilir. Bu denklemin ikinci tarafsızının genel çözümü:

$$y_1 = C_4 + C_5\, e^{3t}$$

dir. İkinci taraflı denklemin $6t$ den ötürü olan özel çözümü:

$$y_2 = t\,(at + b) = at^2 + bt$$

şeklinde olup a ve b yi belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$Dy_2 = 2at + b \quad , \quad D^2 y_2 = 2a$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$2a - 6at - 3b \equiv 6t$$

$$-6a = 6 \quad , \quad a = -1$$

$$2a - 3b = 0 \quad , \quad b = -\frac{2}{3}$$

ve

$$y_2 = -t^2 - \frac{2}{3}\, t$$

bulunur.

İkinci taraflı denklemin $-2e^{2t}$ den ötürü olan özel çözümü ise:

$$y_3 = K\, e^{2t}$$

şeklinde olup K yı belirtmek üzere türevler alınırsa:

$$Dy_3 = 2K\, e^{2t} \quad , \quad D^2 y_3 = 4Ke^{2t}$$

ve diferansiel denklemde yerlerine konulursa:

$$4\,K\, e^{2t} - 6\,K\, e^{2t} \equiv -2e^{2t}$$

$$-2\,K\, e^{2t} \equiv -2e^{2t}$$

$$-2K = -2 \quad , \quad K = 1$$

olarak:

$$y_3 = e^{2t}$$

bulunur. Bunlara göre y genel çözümü:

$$y = C_4 + C_5\, e^{3t} - \frac{1}{3}\,(3t^2 + 2t) + e^{2t}$$

dir.

x ve y ifadelerindeki sabitler arasındaki bağıntıları belirtmek üzere bunların türevlerini alalım:

$$\frac{dx}{dt} = 3C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{-2t} + t - \frac{1}{6}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 9C_2 e^{3t} + 4C_3 e^{-2t} + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = 3C_5 e^{3t} - 2t - \frac{2}{3} + 2e^{2t}$$

Bu değerler diferansiel denklem sisteminde yerlerine konulursa:

$$(15\,C_2 + 3\,C_5)\,e^{3t} + 2e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$(5C_2 + C_5)\,e^{3t} + 3t^2 + 2C_1 - 2C_4 - \frac{5}{6} = 3t^2$$

elde edilirki bunlardan da, eşitliklerin sağlanabilmesi için:

$$15\,C_2 + 3\,C_5 = 0 \quad , \quad 5\,C_2 + C_5 = 0 \quad , \quad 2\,C_1 - 2\,C_4 - \frac{5}{6} = 0$$

$$C_5 = -5\,C_2 \quad , \quad C_4 = C_1 - \frac{5}{12}$$

olması gerektiği bulunur. Bunlara göre diferansiel denklem sisteminin çözümü;

$$y = C_1 - \frac{5}{12} - 5\,C_2 e^{3t} - \frac{1}{3}(3t^2 + 2t) + e^{2t}$$

$$x = C_1 + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-2t} + \frac{1}{6}(3t^2 - t)$$

dir.

Aşağıdaki diferansiel denklemleri çözünüz:

62. $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$ Cevap: $(x+1)^2 + (y-1)^2 + 2\log(x-1)(y+1) = C$

63. $\sqrt{y^2-1}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ Cevap: $\text{Arcsin}\,x + \sqrt{y^2-1} = C$

64. $du + u\,\text{tg}\,v\,dv = 0$ Cevap: $u = C\cos v$

65. $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r}{\cos\theta}$ Cevap: $r = C(\sec\theta + \text{tg}\,\theta)$

66. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{e^{2z}}{4+y^2}$ Cevap: $e^{2z} - \text{Arctg}\,\dfrac{y}{2} = C$

67. $y' + \dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$ Cevap: $\dfrac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = C$

68. $(x^2+y^2)dx+xy\,dy=0$ Cevap: $x^4+2x^2y^2=C$

69. $(y+\sqrt{x^2-y^2})dx-x\,dy=0$ Cevap: $\log Cx=\text{Arcsin}\,\frac{y}{x}$

70. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-\sqrt{xy}}$ Cevap: $2\sqrt{\frac{x}{y}}=\log Cy$

71. $y\,dx+(x+y)dy=0$ Cevap: $2xy+y^2=C$

72. $\left(y+\frac{1}{x}\right)dx+x\,dy=0$ Cevap: $xy+\log x=C$

73. $(2xy^3-2y^2+4x^3)dx+(3x^2y^2-4xy-3y^2)dy=0$ Cevap: $x^2y^3-2xy^2+x^4-y^3=C$

74. $\left(y^2-\frac{y}{x^2}e^{y/x}\right)dx+\left(2xy+\frac{1}{x}e^{y/x}\right)dy=0$ Cevap: $xy^2+e^{y/x}=C$

75. $\text{Arcsin}\,y\,dx+\frac{x+2\sqrt{1-y^2}\cos y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$ Cevap: $x\,\text{Arcsin}\,y+2\sin y=C$

76. $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+xy=x^2$ Cevap: $(x-2y)\sqrt{x^2+1}=\log(x+\sqrt{x^2+1}+C$

77. $\frac{dy}{dx}=y+\sin x$ Cevap: $2\;y+\sin x+\cos x=C\,e^x$

78. $dy+(y-2\sin x)\cos x\,dx=0$ Cevap: $y+2=2\sin x+C\,e^{-\sin x}$

79. $x^2\log x\frac{dy}{dx}+xy=1$ Cevap: $\frac{1}{x}+y\log x=C$

80. $\text{tg}\,x\frac{dy}{dx}+y=\sec x$ Cevap: $y\sin x=x+C$

81. $x(x+1)y'+y=\text{Arctg}\,x$ Cevap: $y=\frac{x+1}{4x}\log\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{x-1}{2x}\text{Arctg}\,x+\frac{C(x+1)}{x}$

82. $L\frac{di}{dt}+Ri=E$ Cevap: $i=\frac{E}{R}+c\,e^{-\frac{R}{L}t}$

83. $x\frac{dy}{dx}+y=x\,y^3$ Cevap: $C\,x^2y^2+2xy^2=1$

84. $\frac{ds}{dt}=\frac{t^2+s^2}{st}$ Cevap: $s^2=t^2\log t^2+C\,t^2$

85. $3y'\cos x+y\sin x-\frac{1}{y^2}=0$ Cevap: $y^3=\sin x+C\cos x$

86. $xy'+y=y^2\log x$ Cevap: $y=\frac{1}{\log x+1+Kx}$

87. $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$ Cevap: $\frac{1}{y}=K\,e^x-\sin x$

88. $y'+1=e^y$ Cevap: $e^y=1+C\,e^{x+y}$

89. $x\,y'+y=x\sin x$ Cevap: $xy=\sin x-x\cos x+C$

90. $y'\,\text{cotg}\,x+y=1$ Cevap: $y=1+C\cos x$

91. $y\,dx + (x^3 + x^3y^2)\,dy = 0$ Cevap : $\frac{1}{x^2} + y^2 + 2\log y = C$

92. $x\,y' + y = ch\,x$ Cevap : $xy = sh\,x + C$

93. $\left(\frac{x}{y} + y\right)dy + dx = 0$ Cevap : $xy + \frac{1}{3}\,y^3 = C$

94. $n\,x\,y' + 2y = x\,y^{n+1}$ Cevap : $C\,x^2y^n + x\,y^n - 1 = C$

95. $(x - y\,e^{y/x})\,dx + x\,e^{y/x}dy = 0$ Cevap : $e^{y/x} + \log x = C$

96. $x\,dy - [y + x\,y^3(1 + \log x)]dx = 0$ Cevap : $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}\,x\left(\frac{2}{3} + \log x\right) + C$

97. $y'' = \sin x$ Cevap : $y = -\sin x + C_1x + C_2$

98. $\frac{d^2s}{dt^2} = -32$ Cevap : $s = -16\,t^2 + C_1t + C_2$

99. $y'' = y - a$ Cevap : $\log[y - a + \sqrt{(y-a)^2 + C_1}] = \mp x + C_2$

100. $2y\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4$ Cevap : $2\sqrt{C_1y - 4} = \mp C_1x + C_2$

101. $x\,y'' - y' = 0$ Cevap : $y = C_1x^2 + C_2$

102. $y^{IV} = e^x + \text{sh}\,x$ Cevap : $y = e^x + \text{sh}\,x + C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$

103. $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ Cevap : $y = C_1 + \log\sec(x + C_2)$

104. $\frac{d^2y}{dx^2} + y\,\frac{dy}{dx} = 0$ Cevap : $\log\frac{C_1 - y}{C_1 + y} = C_1x + C_2$

105. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^y$ Cevap : $C_1 - \sqrt{C_1^2 + e^{2y}} = C_2e^{y - C_1x}$

106. $y\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ Cevap : $C_1y = C_2\,e^{C_1x} - 2$

107. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 2x^{-3}$ Cevap ; $y = C_1\text{Arctg}\,x + \frac{1}{x} + C_2$

108. $yy'' + y'^2 = 2$ Cevap : $y^2 = 2x^2 + C_1x + C_2$

109. $y'' + y' - 6y = 0$ Cevap : $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$

110. $y''' - y'' - 12y' = 0$ Cevap : $y = C_1 + C_2e^{4x} + C_3e^{-3x}$

111. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$ Cevap : $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-3x}$

112. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ Cevap : $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2\,e^x$

113. $y^{IV} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$ Cevap : $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + C_4e^{4x}$

114. $y'' - 2y' + 10y = 0$ Cevap : $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$

115. $y''' + 4y' = 0$ Cevap ; $y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$

116. $y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$ Cevap : $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x$

117. $y'' - 3y' + 2y = e^x$ Cevap : $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x\,e^x$

118. $y''' + 3y'' - 4y = x\,e^{-2x}$ Cevap: $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-2x} + C_3\,x\,e^{-2x} - \frac{1}{18}(x^3 + x^2)\,e^{-2x}$

119. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ Cevap: $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$

120. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$ Cevap: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}$

121. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$ Cevap: $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3x\,e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$

122. $y'' + 9y = x\cos x$ Cevap: $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{8}x\cos x + \frac{1}{32}\sin x$

123. $y'' + y' - 2y = 2(1 + x - x^2)$ Cevap: $y = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} + x^2$

124. $y'' - y = \sin^2 x$ Cevap: $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x$

125. $y'' - 2y' = e^{x}\sin x$ Cevap: $y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{x}\sin x$

126. $y''' + y' = \operatorname{cosec} x$ Cevap: $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \log(\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x) - \cos x \log \sin x - x\sin x$

127. $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$ Cevap: $y = e^{x}(C_1\cos\sqrt{2}\,x + C_2\sin\sqrt{2}\,x) + \frac{1}{27}(9x^3 + 18x^2 + 6x - 8) + \frac{1}{4}(\sin x + \cos x)$

128. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{x} + x^2$ Cevap: $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{1}{6}x\,e^{x}$

129. $y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + x\,e^{2x}$ Cevap: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{x} + \frac{1}{20}x^5e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}$

130. $y'' + 4y = x^2\sin 2x$ Cevap: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{12}x^3\cos 2x + \frac{1}{16}x^2\sin 2x + \frac{1}{32}x\cos 2x$

131. $y^{IV} + 2y''' - 3y'' = x^3 + 3e^{2x} + 4\sin x$ Cevap: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x} + C_4e^{-3x} - \frac{x^2}{108}(3x^2 + 8x + 28) + \frac{3}{30}e^{2x} + \frac{2}{5}(\cos x + 2\sin x)$

132. $y'' - 4y' + 3y = 2xe^{3x} + 3e^{x}\cos 2x$ Cevap: $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{2}e^{3x}(x^2 - x) - \frac{3}{8}e^{x}(\cos 2x + \sin 2x)$

133. $y'' + 3y' + 2y = x\sin 2x$ Cevap: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - \frac{30x - 7}{200}\cos 2x - \frac{5x - 12}{100}\sin 2x$

134. $y'' - y = x^2\sin 3x$ Cevap: $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{25x^2 - 13}{250}\sin 3x - \frac{3}{25}x\cos 3x$

135. $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}\sec^2 x(1 + 2\,\text{tg}\,x)$ Cevap: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + e^{-2x}\text{tg}\,x$

136. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 8\,e^{2x}$ Cevap. $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+(C_3+C_4x)e^{2x}+ \frac{x^2}{4}e^{2x}$

137. $y''+4y'+5y=20\cos 3x$ Cevap: $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{2}(3\sin 3x - \cos x)$

138. $y^{IV}+y''=x^3+15\,e^{3x}$ Cevap: $y = C_1 + C_2x + C_3\sin x + C_4\cos x + \frac{1}{20}x^5 - x^3 + \frac{1}{6}e^{3x}$

139. $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0$ Cevap: $y = C_1x + C_2x\log x + \frac{C_3}{x^2}$

140. $x^3y''' + xy' - y = x\log x$ Cevap: $y = x\left[C_1 + C_2\log x + C_3(\log x)^2 + \frac{1}{24}(\log x)^4\right]$

141. $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\log x$ Cevap: $y = C_1x^2+C_2x^2\log x+x+\frac{1}{6}x^2\log^3 x$

142. $x^3y''' + xy' - y = 3x^4$ Cevap: $y = C_1x + C_2x\log x + C_3x\log^2 x + \frac{x^4}{9}$

143. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - y = -e^t \\ \dfrac{dy}{dt} + x - y = e^{2t} \end{cases}$ Cevap: $\begin{aligned} x &= (C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t + \frac{3}{5}e^{2t} \\ y &= C_1\cos t+C_2\sin t+ \frac{2}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t \end{aligned}$

144. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x+3y=e^{-t}-1 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2x+y=e^{2t}+t \end{cases}$ Cevap; $\begin{aligned} x &= 2C_1e^{-\frac{7}{5}t} + \frac{5}{17}e^{2t}+ \frac{3}{7}t - \frac{1}{49} \\ y &= 3C_1e^{-\frac{7}{5}t} - \frac{1}{17}e^{2t}+ \frac{1}{2}e^{-t}+ \frac{1}{7}t - \frac{26}{49} \end{aligned}$

145. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x = 2t + 1 \\ 2\dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} + x = t \end{cases}$ Cevap: $\begin{aligned} x &= -t - \frac{2}{3} \\ y &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + C_1 \end{aligned}$

146. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = \cos t \end{cases}$ Cevap: $\begin{aligned} x &= C_1 + C_2e^t + C_3e^{-t} \\ y &= C_4 - C_2e^t + C_3e^{-t} - \cos t \end{aligned}$

15. KATLI İNTEGRALLER

1. $\int_{1}^{4}\int_{-2}^{3}(x^2-2xy^2+y^3)\,dx\,dy$ *iki katlı integralini hesaplayınız.*

$$\int_{-2}^{3}(x^2-2xy^2+y^3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2y^2 + y^3x \Big|_{-2}^{3}$$

$$= 9 - 9y^2 + 3y^2 - \left(-\frac{8}{3} - 4y^2 - 2y^3\right)$$

$$= \frac{35}{3} - 5y^2 + 5y^3$$

olup:

$$\int_{1}^{4}\int_{-2}^{3}(x^2-2xy^2+y^3)\,dx\,dy = \int_{1}^{4}\left(\frac{35}{3} - 5y^2 + 5y^3\right)dy$$

$$= \left|\frac{35}{3}y - \frac{5}{3}y^3 + \frac{5}{4}y^4\right|_{1}^{4}$$

$$= \frac{995}{4}$$

dür.

2. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{2x} x\,y\,dy\,dx$ *iki katlı integralini hesaplayınız.*

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{2x} x\,y\,dy\,dx = \int_{0}^{2}\left|\frac{1}{2}x\,y^2\right|_{0}^{2x}dx$$

$$= \int_{0}^{2} 2\,x^3\,dx = \left|\frac{1}{2}x^4\right|_{0}^{2} = 8$$

dir.

3. $\iint\limits_F x^2y^2\,dA$ *integralini* $y=1$, $y=2$, $x=0$ *ve* $x=y$ *doğrularının sınırladığı F bölgesinde hesaplayınız.*

F bölgesi $1 \leqslant y \leqslant 2$ ve $0 \leqslant x \leqslant y$ olup :

$$\iint\limits_F x^2y^2\,dA = \int_1^2\int_0^y x^2y^2\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \left| \frac{1}{3}x^3y^2 \right|_0^y dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 y^5\,dy$$

$$= \frac{7}{2}$$

dir.

4. $\iint x\,y\,dx\,dy$ *integralini* $x^2+y^2=a^2$ *dairesinin birinci bölgedeki kısmında hesaplayınız.*

$$\iint\limits_F x\,y\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a \left| \frac{x\,y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \frac{x}{2}(a^2-x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left| \frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_0^a$$

$$= \frac{1}{8}a^4$$

5. $\iint\limits_F \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\, dx\, dy$ *iki katlı integralini kenarları a ve b olan bir OACB dikdörtgen bölgesinde ve bu dörtgenin yarısı olan OAB üçgen bölgesinde hesaplayınız.*

1. Dikdörtgen bölgesinde (şekil 118) :

$$\iint\limits_{F_1} \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dx\,dy=\int_0^a\int_0^b \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dx\,dy$$

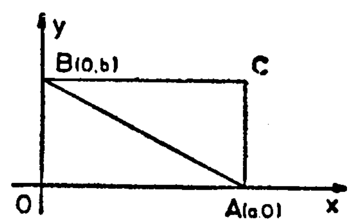
$$=\int_0^a \left|-\frac{2b}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{b}\right)\right|_0^b dx$$

$$=\frac{2b}{\pi}\int_0^a \left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a}+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a}\right)dx$$

$$=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{2b}{\pi}\left|-\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a}+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{a}\right|_0^a$$

$$=\frac{8ab}{\pi^2}$$

2. Üçgen bölgesinde : OAB üçgeninin AB kenarının denklemi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ dır. x in verilmiş bir değeri için y nin limit değerleri 0 ve $\frac{b}{a}(a-x)$ olduğuna göre



Şekil 118

$$\iint\limits_{F_2} \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dx\,dy=\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dy$$

$$=\int_0^a \left|-\frac{2b}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\right|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx$$

$$=\int_0^a \frac{2b}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\,dx$$

$$= \left| \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2b}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a} \right|_0^a$$

$$= \frac{4ab}{\pi^2}$$

dir.

6. $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\, dy\, dx$ *iki katlı integralini hesaplayınız.*

Buradaki birinci integrali basit kurallarla hesaplamak mümkün değildir. Ancak integral sırası değiştirilmek suretile hesaplamak mümkün olabilir. İntegral bölgesi $x=0$, $x=1$, $y=x$, $y=1$ doğrularının sınırladığı üçgen bölgesi olduğuna göre :

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left| x\, e^{y^2} \right|_0^y dy$$

$$= \int_0^1 y\, e^{y^2}\, dy$$

$$= \left| \frac{1}{2} e^{y^2} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ (e-1)$$

dir.

7. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 \sin x^2\, dx\, dy$ *iki katlı integralini hesaplayınız.*

Bu integral sınırlarına göre integrali hesaplamak mümkün değildir. İntegrasyon bölgesi $x=1, x=\frac{1}{2}\, y$, $y=0$, $y=2$ doğrularının sınırladığı üçgen bölgesi olup :

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 \sin x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} \sin x^2 \, dy \right) dx$$

yazılabilir ve buradan da :

$$= \int_0^1 \left| y \sin x^2 \right|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 2x \sin x^2 \, dx$$

$$= \left| -\cos x^2 \right|_0^1$$

$$= 1 - \cos 1$$

bulunur.

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sec\theta} \frac{r\, dr\, d\theta}{1 + r^2 \sin^2\theta}$ *iki katlı integralini hesaplayınız.*

Kartezyen koordinatlara dönüştürelim. $r \cos\theta = x, r \sin\theta = y$ olup $r=0$ için $x=0$; $r=\sec\theta$ için $x=1$ ve $\theta=0$ için $y=0$; $\theta=\frac{\pi}{2}$ için $y \to \infty$ olarak :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sec\theta} \frac{r\, dr\, d\theta}{1 + r^2 \sin^2\theta} = \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+y^2} \right) dy$$

$$= \int_0^{\infty} \left| \frac{x}{1+y^2} \right|_0^1 dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \Big| \text{Arctg}\, y \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

bulunur.

9. $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$ *iki katlı integralini hesaplayınız.*

Kutupsal koordinatlara dönüştürelim,

$x^2+y^2=r^2$; $x=r\cos\theta$; $y=r\sin\theta$

olarak :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^2 \cos^2\theta \,.\, r \,.\, r\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^4 \cos^2\theta\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \left| \frac{r^5}{5} \right|_0^a d\theta$$

$$= \frac{a^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{a^5}{10} \left| \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi a^5}{20}$$

bulunur.

10. *D bölgesi $x^2+y^2=R^2$ dairesi olduğuna göre*

$I=\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ *iki katlı integralini hesaplayınız.*

İntegralin hesabı için $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ dönüştürmesini yapalım. Bu takdirde $x^2+y^2=r^2$ olarak integral :

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_D \sqrt{1+r^2}\,r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{1+r^2}\,r\,dr\right)d\theta$$

şeklini alır. Bunu hesaplamak için de: $1+r^2=u$ dönüştürmesi yapılırsa $2r\,dr=du$ ve $r=0$ için $u=1$; $r=\mathrm{R}$ için $u=1+\mathrm{R}^2$ olarak

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^{1+\mathrm{R}^2} \frac{u^{1/2}du}{2}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\frac{u^{3/2}}{3}\right|_1^{1+\mathrm{R}^2} d\theta$$

$$=\frac{(1+\mathrm{R}^2)^{3/2}-1}{3}\left|\theta\right|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}[(1+\mathrm{R}^2)^{3/2}-1]$$

bulunur.

11. *D bölgesi $R_1=1$ ve $R_2=2$ yarıçaplı dairelerin sınırladığı bölge olmak üzere $I=\iint_D (2x+y)^2\,dx\,dy$ iki katlı integralini hesaplayınız.*

Kutupsal koordinatlara dönüştürürsek :

$$x=r\cos\theta\quad,\qquad y=r\sin\theta$$

olarak :

$$I=\iint_D (2x+y)^2\,dx\,dy=\iint_D (2r\cos\theta+r\sin\theta)^2\,r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 r^3\,dr\right)(2\cos\theta+\sin\theta)^2\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\frac{r^4}{4}\right|_1^2(4\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{15}{4}\int_0^{2\pi}(3\cos^2\theta+4\sin\theta\ \cos\theta+1)\,d\theta$$

$$=\frac{15}{4}\int_0^{2\pi}\left(3\,\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4\sin\theta\cos\theta+1\right)d\theta$$

$$=\frac{75}{8}\int_0^{2\pi}d\theta+\frac{45}{8}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,d\theta+15\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{75\pi}{4}$$

bulunur.

12. *D bölgesi $y^2=4-x$, $x=0$, $y=0$ eğrilerinin sınırladığı bölge olduğuna göre*

$$\iint_D \frac{1}{4}(16-x^2)\,ds$$

iki katlı integralini hesaplayınız.

$$\iint_D \frac{1}{4}(16-x^2)\,ds=\frac{1}{4}\int_0^4\left(\int_0^{\sqrt{4-x}}(16-x^2)\,dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^4\left|(16-x^2)\,y\right|_0^{\sqrt{4-x}}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^4 (16-x^2)\sqrt{4-x}\,dx$$

olup

$\sqrt{4-x}=u$ dönüştürmesi yapılırsa: $u^2=4-x$, $x=4-u^2$: $dx=-2u\,du$ olarak:

$$=\frac{1}{4}\int_2^0 [16-(4-u^2)^2]\;u\,(-2u)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2\,(16-16+8u^2-u^4)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 (8\,u^4-u^6)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{5}\,u^5-\frac{1}{7}\,u^7\right|_0^2$$

$$=\frac{576}{35}$$

bulunur.

13. *$(y-x-3)^2=4-x^2$ eğrisinin sınırladığı alanı hesaplayınız.*

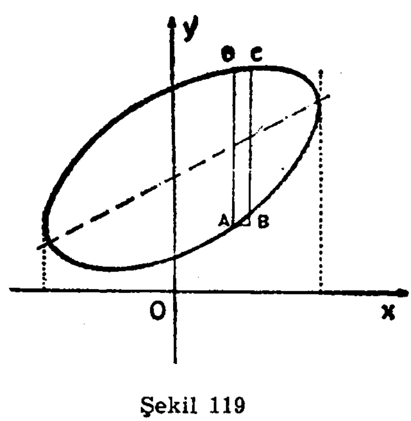
$y=x+3\mp\sqrt{4-x^2}$ olup:

$$y_1=x+3-\sqrt{4-x^2}$$

$$y_2=x+3+\sqrt{4-x^2}$$

ve

$$y_2-y_1=2\sqrt{4-x^2}$$



Şekil 119

olur. Alan elemanı olarak ABCD dikdörtgeni (şekil 119) alınırsa:

$$F=\int_{-2}^{+2}\int_{y_1}^{y_2} dx\,dy=\int_{-2}^{+2}\left| y \right|_{y_1}^{y_2} dx=\int_{-2}^{+2} 2\sqrt{4-x^2}\,dx=4\pi$$

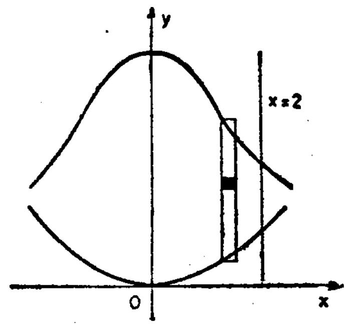
bulunur.

14. $y=\dfrac{16}{x^2+4}$, $y=\dfrac{x^2}{4}$ *eğrileri* $x=0$, $x=2$ *doğrularının sınırladıkları alanı iki katlı integralle hesaplayınız. (Şekil. 120)*

$$F=\int_{0}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{16}{x^2+4}} dy\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}\left(\frac{16}{x^2+4}-\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\,(3\pi-1)$$

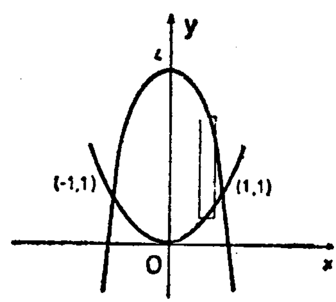


Şekil 120

15. $y=x^4$ *ve* $y=4-3x^2$ *eğrilerinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. (Şekil. 121)*

$$F=\int_{-1}^{+1}\int_{x^4}^{4-3x^2} dy\,dx$$

$$=\int_{-1}^{+1}\left| y \right|_{x^4}^{4-3x^2} dx$$



Şekil 121

$$=\int_{-1}^{+1}(4-3x^2-x^4)\,dx$$

$$=\left| 4x-x^3-\frac{1}{5}x^5 \right|_{-1}^{+1}=\frac{28}{5}\text{ A.B.}$$

16. ***$r=a(1-\cos\theta)$ kardioidinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız.***

$$F=\iint_D r\,d\theta\,dr=\int_0^{2}\left(\int_0^{a(1-\cos\theta)} r\,dr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\frac{r^2}{2}\right|_0^{a(1-\cos\theta)}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{3a^2}{4}\left|\theta\right|_0^{2\pi}-a^2\left|\sin\theta\right|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{4}\left|\frac{\sin 2\theta}{2}\right|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{3\pi a^2}{2}$$

17. ***$r=a$ dairesinin dışında ve $r=a(1+\cos\theta)$ kardioidinin içinde kalan alanı hesaplayınız.***

$$\frac{F}{2}=\int_0^{\pi/2}\int_a^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left|\frac{1}{2}r^2\right|_a^{a(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{a^2}{2}(2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\left[2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left| \, 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \, \right|_{\theta}^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(2 + \frac{\pi}{4} \right)$$

ve

$$F = \frac{a^2}{4} (\pi + 8) \quad \textbf{A. B.}$$

dir.

18. *$r = 3 \cos \theta$ dairesinin içinde ve $r = 1 + \cos \theta$ kardioidinin dışındaki alanı iki katlı integral yardımiyle hesaplayınız.*

$$F = \iint_D r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \left(\int_{1+\cos \theta}^{3 \cos \theta} r \, dr \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \left| r^2 \right|_{1+\cos \theta}^{3 \cos \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} (9 \cos^2\theta - 1 - 2 \cos\theta - \cos^2\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} (8 \cos^2\theta - 2 \cos\theta - 1) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} (3 + 4 \cos 2\theta - 2 \cos\theta) \, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left|3\theta+2\sin 2\theta-2\sin\theta\right|_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}}$$

$$=\pi$$

dir.

19. *$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ lemniskatı $r=2a\sin\theta$ dairesi ve $\theta=\frac{\pi}{4}$ doğrusunun sınırladıkları alanı iki katlı integralle bulunuz.*

Şekil 122 deki B noktasının koordinatları $\left(a, \frac{\pi}{6}\right)$ olup:

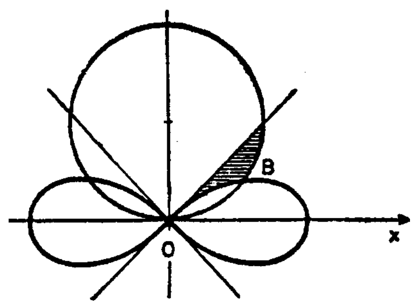
$$F=\int\int r\,d\theta\,dr$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{a\sqrt{2\cos 2\theta}}^{2a\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/4}(2a^2\sin^2\theta-a^2\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{12}(\pi+6\sqrt{3}-12)$$

dir.



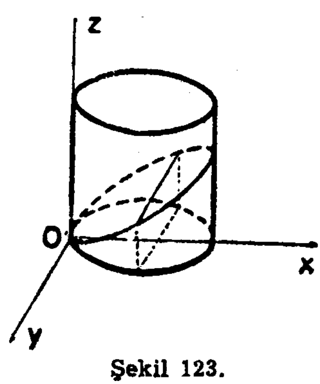
Şekil 122

20. *$x^2+y^2=2ax$ silindirik yüzeyi, $z=mx$ ve $z=0$ düzlemleri ile sınırlanan hacmı hesaplayınız. (Şekil 123)*

$$\frac{V}{2}=\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} mx\,dy$$

$$=m\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}\,dx$$

$$V=m\pi a^3$$



Şekil 123.

21. ***Denklemleri $z=x^2$, $z=4-y^2$ olan silindirler arasında kalan hacmı hesaplayınız.***

Bu silindirlerin arakesitinin xy düzlemindeki izdüşümü $x^2+y^2=4$ dairesidir. Bu dairenin içindeki bir noktadan oz e bir parelel çizilirse bu doğru, ortak hacmı $z_1=x^2$ ve $z_2=4-y^2$ kotlu noktalarda deler. O halde hacım:

$$V=\iint_F (z_2-z_1)\,dA=\iint_F (4-x^2-y^2)\,dA$$

dır. Buradaki dA, xy düzlemindeki dairenin alan elemanıdır. Kutupsal koordinatları kullanırsak:

$$V=\iint (4-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

olur. r in sınırları 0 ve 2; θ nınkiler de 0 ve 2π dir. O halde:

$$V=\int_0^2 dr\int_0^{2\pi}(4-r^2)\,r\,d\theta=\int_0^2 2\pi(4-r^2)r\,dr$$

$$=2\pi\left|\,2r^2-\frac{r^4}{4}\right|_0^2=8\pi$$

dir.

22. ***$z=4-x^2-y^2$, $z=0$, $x^2+y^2=2x$ yüzeylerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.***

$$V=\iint_D z\,dy\,dx$$ olup D bölgesi $x^2+y^2=2x$ yani

$(x-1)^2+y^2=1$ dairesidir. Buna göre:

$$V=2\int_0^2\left[\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}(4-x^2-y^2)\,dy\right]dx$$

dir. Kutupsal koordinatlara dönüştürürsek: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ ve D bölgesi $r=2\cos\theta$ olarak:

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} (4 - r^2)\, r\, dr \right) d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right|_0^{2\cos\theta} d\theta\ .$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta)\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[4(1+\cos 2\theta) - (1+\cos 2\theta)^2 \right] d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)(3 - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2\cos 2\theta - \cos^2 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + 2\cos 2\theta - \frac{1+\cos 4\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= 2 \left| \frac{5}{2}\theta + \sin 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{5\pi}{2}$$

bulunur.

23. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *elipsoidinin hacmını iki katlı integral yardımiyle hesaplayınız.*

$$V=8\iint\limits_D z\,ds \text{ ve } z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \quad \text{olarak :}$$

(Şekil 128'e bak).

$$V=8\,c\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,ds$$

$$=8\,c\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right)dx \text{ dir.}$$

$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=k$ kabul ederek :

$$V=8\,c\int_0^a\left(\int_0^{bk}\sqrt{k^2-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right)dx$$

ve $\frac{y}{b}=k\sin\varphi$; $y=b\,k\sin\varphi$ dönüştürmesi yapılırsa

$dy=bk\cos\varphi\,d\varphi$ olarak :

$$V=8\,c\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\,k^2\cos^2\varphi\,d\varphi\right)dx$$

$$=8\,c\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\,k^2\,\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right)dx$$

$$=8\,c\int_0^a\left|\frac{bk^2}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=8\,c\int_0^a\frac{\pi b}{4}\,k^2\,dx$$

$$=2\pi\, bc \int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$=2\pi\, bc \left| x - \frac{x^3}{3a^2} \right|_0^a$$

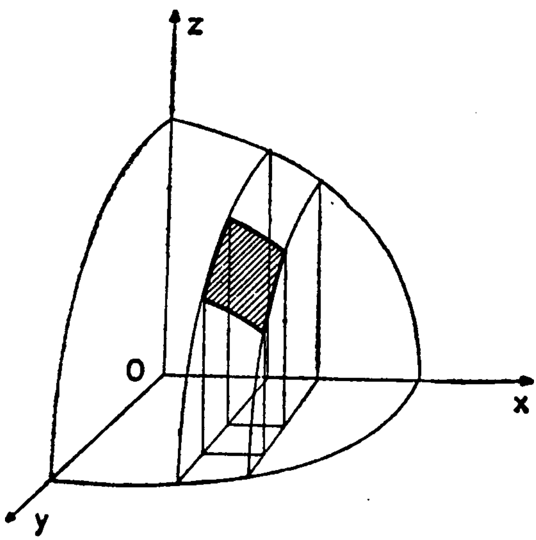
$$=\frac{4\pi abc}{3}$$

bulunur.

24. *r yarıçaplı bir kürenin alanını veren formülü iki katlı integralle bulunuz.*

Kürenin merkezini orijinde alırsak denklemi (Şekil 124):

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$



Şekil 124

olur. Bu yüzeyin *xoy* düzlemindeki izdüşümü:

$$x^2+y^2=r^2$$

dir. Diğer taraftan:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

ve

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

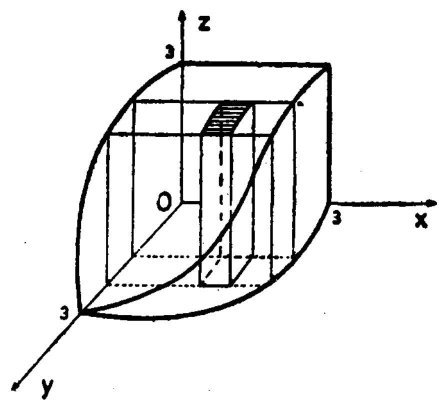
olarak :

$$\frac{F}{8}=\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{r\,dx\,dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\frac{1}{2}\pi r\int_0^r dx=\frac{1}{2}\pi r^2$$

$$F=4\pi r^2$$

bulunur.

25. *$x^2+y^2=9$ ve $y^2+z^2=9$ silindirlerinin birinci bölgede sınırladıkları hacmı ve $y^2+z^2=9$ silindir yüzeyinin $x^2+y^2=9$ silindiriyle ayrılmış kısmının alanını hesaplayınız.*



Şekil 125

$$1)\quad V=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\sqrt{9-y^2}\,dx\,dy \qquad \text{(Şekil 125)}$$

$$=\int_0^3\left|\sqrt{9-y^2}\,x\right|_0^{\sqrt{9-y^2}}dy$$

$$=\int_0^3(9-y^2)\,dy=\left|9y-\frac{y^3}{3}\right|_0^3=18$$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$; $\dfrac{\partial f}{\partial z}=2z$ olarak :

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}=\sqrt{4y^2+4z^2}=2\sqrt{y^2+z^2}=6 \text{ ve}$$

$$\frac{1}{8}F=\iint\limits_{(S)}\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dx\,dy$$

$$=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\frac{6}{2\sqrt{9-y^2}}dx\,dy$$

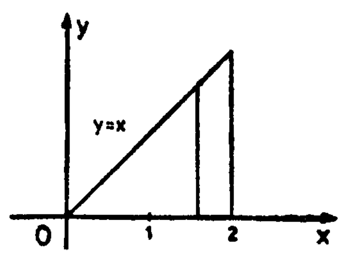
$$=3\int_0^3\left|\frac{x}{\sqrt{9-y^2}}\right|_0^{\sqrt{9-y^2}}dy=3\int_0^3 dy=9$$

26. *$z=\frac{1}{2}x^2$ silindirinin $y=0$, $y=x$ ve $x=2$ düzlemleriyle kesilmesinden elde edilen kısmının alanını hesaplayınız. (Şekil 126)*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$F=\iint\sqrt{1+x^2}\,dA$$

$$F=\int_0^2\int_0^x\sqrt{1+x^2}\,dy\,dx$$



Şekil 126

$$=\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{3}\left|(1+x^2)^{3/2}\right|_0^2$$

$$=\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

dir.

27. *$x^2+y^2+z^2=r^2$ küresinin kutupsal denklemi $\rho=r\cos 2\theta$ olan silindirin bir halkasıyla kesilen kısmının alanını bulunuz.*

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

olup :

$$F=\iint \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dA=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\int_0^{r\cos 2\theta}\frac{r\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\quad d\rho\,d\theta$$

$$=2r\int_0^{\pi/4}\left|-\sqrt{r^2-\rho^2}\right|_0^{r\cos 2\theta}\,d\theta=2r^2\int_0^{\pi/4}(1-\sin 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\,r^2(\pi-2)$$

ve bütün alan $r^2(\pi-2)$ dir.

23 $\displaystyle\int_0^3\int_0^{6-2z}\int_0^{4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z}$ *yz dx dy dz üç katlı integralini hesaplayınız.*

$$\int_0^3\int_0^{6-2z}\int_0^{4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z} yz\,dx\,dy\,dz=\int_0^3\int_0^{6-2z}\left|x\,y\,z\right|_0^{4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z}dy\,dz$$

$$=\int_0^3\int_0^{6-2z} yz\left(4-\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}z\right)dy\,dz$$

$$=\int_0^3\left|2zy^2-\frac{2}{9}zy^3-\frac{2}{3}z^2y^2\right|_0^{6-2z}$$

$$=\int_0^3\left[\left(2z-\frac{2}{3}z^2\right)(6-2z)^2-\frac{2}{9}z(6-2z)^3\right]dz$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^3 z(6-2z)^3\,dz$$

$$=\frac{54}{5}$$

29. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_0^{a-z} z\,dz\,dy\,dx$ *üç katlı integralini hesaplayınız.*

$$\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_0^{a-z} z\,dz\,dy\,dx=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\Big|\,zx\,\Big|_0^{a-z}\,dz\,dy$$

$$=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} z(a-z)dz\,dy$$

$$=\int_0^a\Big|\,z\,(a-z)\,y\,\Big|_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz$$

$$=\int_0^a az\sqrt{a^2-z^2}dz-\int_0^a z^2\sqrt{a^2-z^2}\,dz$$

olup ikinci taraftaki integralleri hesaplamak üzere,

$\displaystyle\int_0^a az\sqrt{a^2-z^2}\,dz$ integralinde $a^2-z^2=u^2$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$\int_0^a az\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\int_a^0 -au^2du=\int_0^a a\,u^2du$$

$$=a\,\Big|\,\frac{u^3}{3}\,\Big|_0^a\;=\frac{a^4}{3}$$

ve $\displaystyle\int_0^a z^2\sqrt{a^2-z^2}dz$ integralinde $z=a\sin\theta$ dönüştürmesi yapılırsa:

$$\int_0^a z^2\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2\theta\,a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^4}{8}\,\Big|\,\theta-\frac{\sin 4\theta}{4}\,\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^4}{16}\,\pi$$

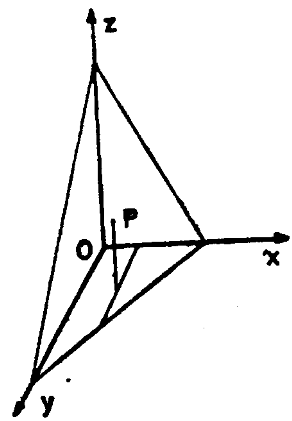
elde edilerek yukarıda yerlerine konursa :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_0^{a-z} z\, dz\, dy\, dx = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{16}\pi = a^4\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)$$

bulunur.

30. *$u=xyz$ fonksiyonunun $x=0, y=0,$ $z=0$ ve $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ düzlemlerinin sınırladığı bölgede üç katlı integralini hesaplayınız.*

(Şekil 127)



Şekil 127

$$\iiint_V xyz\, dV = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy \int_0^{3\left(1-x-\frac{y}{2}\right)} xyz\, dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} xy \left| \frac{z^2}{2} \right|_0^{3\left(1-x-\frac{y}{2}\right)} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} \frac{9xy}{2}\left[1-2x+x^2+(x-1)y+\frac{y^2}{4}\right] dy$$

$$= \int_0^1 \frac{9x}{2} \left| \frac{(1-x)^2y^2}{2} + \frac{(x-1)y^3}{3} + \frac{y^4}{16} \right|_0^{2(1-x)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{9x}{2}\left[2(1-x)^4 - \frac{8}{3}(1-x)^4 + (1-x)^4\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{9x}{2}\, \frac{(1-x)^4}{3}\, dx = \frac{1}{20}$$

31. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ***elipsoidinin hacmını bulunuz.***

İstenen hacım birinci bölgedeki kısmının sekiz katıdır. (Şekil 128)

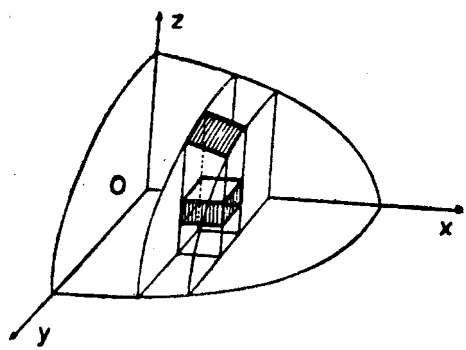
$$V=8\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dx\, dy\, dz$$

$$=8c\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$$

$$=2\pi\, bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc$$

32. $z=2x^2+y^2$ ***paraboloidi ile*** $z=4-y^2$ ***silindirinin sınırladığı hacmi hesaplayınız.***

z, $z=2x^2+y^2$ ***den*** $z=4-y^2$ **ye kadar değiştiği zaman** y, $y=0$ **dan** $y=\sqrt{2-x^2}$ **ye kadar değişir. Bu takdirde** x **de** $x=0$ **dan** $x=\sqrt{2}$ **ye kadar değişir. Bunlara göre:**



Şekil 128

$$V=4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\, dy\, dx$$

$$=4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}[(4-y^2)-(2x^2+y^2)]\, dy\, dx$$

$$=4\int_0^{\sqrt{2}}\left|4y-2x^2y-\frac{2y^3}{3}\right|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{3/2}\,dx=4\pi \quad \text{dir.}$$

33. *$x^{1/2}+y^{1/2}+z^{1/2}=a^{1/2}$ yüzeyinin koordinat düzlemleri ile sınırladığı hacmı hesaplayınız. (Şekil 129)*

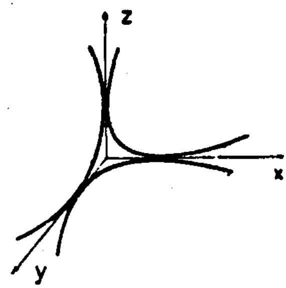
$$V=\iiint dx\,dy\,dz$$

$$V=\int_0^a dx\int_0^{(a^{1/2}-x^{1/2})^2}dy\int_0^{(a^{1/2}-x^{1/2}-y^{1/2})^2}dz$$

$$=\int_0^a dx\int_0^{(a^{1/2}-x^{1/2})^2}\left| z\right|_0^{(a^{1/2}-x^{1/2}-y^{1/2})^2}dy$$

$$=\int_0^a dx\int_0^{(a^{1/2}-x^{1/2})^2}\left[(a^{1/2}-x^{1/2})^2-2\,(a^{1/2}-x^{1/2})\,y^{1/2}+y\right]dy$$

$$=\int_0^a \frac{1}{6}(a^{1/2}-x^{1/2})^4\,dx=\frac{a^3}{90}$$



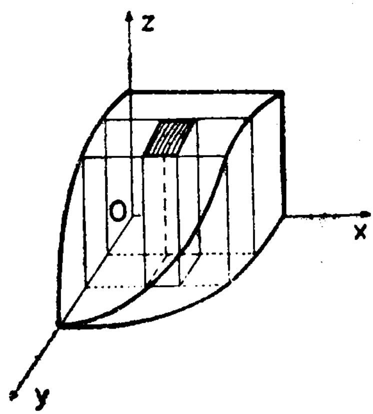
Şekil 129

34. *$x^2+y^2=a^2$, $y^2=a^2-az$ silindirleri ve $z=0$ düzlemlerinin sınırladıkları hacmı hesaplayınız.*

$$V=\iiint dx\,dy\,dz \qquad \text{(Şekil 130)}$$

$$V=4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{\frac{a^2-y^2}{a}}dz$$

$$=4\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a^2-y^2}{a}\,dy$$



Şekil 130

$$=\frac{4}{a}\int_0^a\left[a^2\sqrt{a^2-x^2}-\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}\right]dx$$

ve $x=a\sin\theta$ dönüştürmesi yapılarak :

$$V=\frac{4}{a}\int_0^{\pi/2}\left(a^4\cos^2\theta-\frac{a^4\cos^4\theta}{3}\right)d\theta$$

$$=4a^3\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\cos^4\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2\theta+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{4a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2\theta+\frac{1-\cos 4\theta}{8}\right)d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^3$$

bulunur.

Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

35. $\displaystyle\int_1^2\int_0^{2y}(x+y^2)\,dx\,dy$ Cevap : $\frac{35}{2}$

36. $\displaystyle\int_0^1\int_{2x^2}^{1+x}x\,y\,dy\,dx$ Cevap : $\frac{3}{8}$

37. $\displaystyle\int_0^1\int_1^{1+x^2}(y+2x)^{-\frac{1}{2}}\,dy\,dx$ Cevap : $\frac{1}{3}(11-6\sqrt{3})$

38. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_y^{\frac{\pi}{2}}y\sin 2x\,dx\,dy$ Cevap : $\frac{1}{16}(\pi^2-4)$

39. $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$ Cevap : $\frac{1}{2}\log 2$

40. $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} \frac{x^2\,dy\,dx}{x^2+y^2}$ Cevap : $\frac{1}{8}(4-\pi)$

41. $\displaystyle\int_1^4\int_2^5 (x^2-y^2+xy-3)dx\,dy$ Cevap : $\frac{455}{4}$

42. $\displaystyle\int_1^4\int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x^2+2xy-3y^2)dy\,dx$ Cevap : $-1447\frac{1}{70}$

43. $\displaystyle\int_2^3\int_{1+y}^{\sqrt{y}} (x^2y+xy^2)dx\,dy$ Cevap : $\frac{18}{7}\sqrt{3}-\frac{16}{21}\sqrt{2}-\frac{559}{8}$

44. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{18-2y^2}}^{\sqrt{18-2y^2}} x\,dx\,dy$ Cevap : 0

45. $\displaystyle\int_0^2\int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\,dy\,dx$ Cevap : $\frac{1}{4}(2\cos 4-\cos 8-1)$

46. $\displaystyle\int_2^4\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2}\,dx\,dy$ Cevap : $6-\log 2$

47. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_{\pi/2}^{x^2} x\cos y\,dx\,dy$ Cevap : $\frac{1}{2}(2-\pi)$

48. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(x+y)\,dx\,dy$ Cevap : $\pi-2$

49. $\displaystyle\int_1^2\int_1^{x} \log\frac{x}{y^2}\,dy\,dx$ Cevap : $\frac{1}{4}(11-16\log 2)$

50. $\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x+y)\,dx\,dy$ Cevap : $\frac{1}{9}(5+6\sqrt{3})$

51. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2a\cos\theta} r\,d\theta\,dr$ Cevap : $\frac{1}{2}\pi a^2$

52. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{3\cos\theta} r^2\sin^2\theta\,d\theta\,dr$ Cevap : $2\frac{2}{5}$

Aşağıdaki iki katlı integralleri gösterilen F bölgesinde hesaplayınız.

53. $\iint_F (x^2+y^2)\,dA$ F : $0\leqslant y\leqslant 2$; $y^2\leqslant x\leqslant 4$ Cevap : $40\frac{88}{105}$

54. $\iint_F \frac{x}{x^2+y^2}\,dA$ F : $y=0, y=x, x=1$ ve $x=\sqrt{3}$ Cevap : $\frac{\pi}{4}(\sqrt{3}-1)$

Aşağıdaki iki katlı integralleri integral sırasını değiştirerek hesaplayınız.

55. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Cevap : $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

56. $\int_{0}^{1}\int_{2y}^{2} y\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ Cevap : $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-8)$

57. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{1} x(x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$ Cevap : $\frac{1}{30}(4\sqrt{2}-1)$

58. $\int_{0}^{\infty}\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}\,dt\,dx}{t}$ Cevap : 1

59. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{1} x\sin y^3\,dy\,dx$ Cevap : 0,077

60. $\displaystyle\int_0^2\int_{y/2}^1 \frac{dx\,dy}{(1+x^2)^3}$ Cevap : $\dfrac{3}{8}$

61. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,dy\,dx$ Cevap 0,406

Aşağıdaki iki katlı integralleri kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesaplayınız.

62. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\,dx$ Cevap $\dfrac{\pi(e-1)}{4e}$

63. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$ Cevap : $\dfrac{1}{4}\pi(e-1)$

64. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \frac{x^6\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$ Cevap : $\dfrac{5}{36}\sqrt{2}$

Aşağıdaki iki katlı integralleri herhangi bir yoldan hesaplayınız.

65. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{x^2\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ Cevap $\dfrac{1}{4}\pi a$

66. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 x\cos y^3\,dy\,dx$ Cevap : $\dfrac{1}{6}\sin 1$

67. $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{x^4\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ Cevap $\dfrac{1}{16}\pi a^3$

68. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \frac{\cos x}{x}\,dx\,dy$ Cevap $\sin 1$

69. $\displaystyle\int_0^1\int_0^y \frac{y^2\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ Cevap : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

70. $3y^2 = 25x$ ve $5x^2 = 9y$ parabollarının sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : 5

71. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ ve $x+y=a$ eğrilerinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : $\frac{a^2}{3}$

72. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ eğrilerinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : $\sqrt{2}-1$

73. $xy^2 = a^3$ eğrisi ile $y = a$ ve $x = 0$ doğrularının sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız.

74. $x^2 = 2ay$ ve $x^2 = 4ay - a^2$ eğrilerinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : $\frac{1}{3} a^2$

75. $3x^2 = 2y$ ve $y^2 = 18x$ parabollerinin sınırladıkları alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : 4

76. $y = x^2$ ve $y = 2 - x^2$ eğrilerinin sınırladıkları alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : $2 \frac{2}{3}$

77. $(x+y)^2 = y^2(y+1)$ eğrisinin halkasının sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : $\frac{8}{15}$

78. $x^2+y^2 = 5a^2$ dairesi ile $y = \dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ eğrisinin herbirinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız.

Cevap : $\left(2 - 2\pi + 5 \arcsin \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) a^2$ ve $\left(7\pi - 2 - 5 \arcsin \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) a^2$

79. $r = 2\cos\theta + 3$ eğrisi ile $r = 2\cos\theta$ eğrisinin sınırladıkları alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : 10π

80. $r = 6\sin\theta$, $r = 12\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : 27π

81. $r\cos\theta = 4$, $r = 8$ eğrilerinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız. Cevap : $\frac{64\pi}{3} - 16\sqrt{3}$

82. $r = \theta\,(1 - \sin a)$ eğrisinin sınırladığı alanı iki katlı integralle hesaplayınız.

Cevap : $\frac{3\pi a^2}{2}$

83. $x=0,\ z=0,\ y^2=4-x$ ve $z=y+2$ yüzeylerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız. Cevap : $\frac{64}{3}$

84. $y^2=z,\ y=z^3,\ z=x$ ve $y^2=2-x$ yüzeylerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız. Cevap : $\frac{8}{15}$

85. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ düzleminin koordinat düzlemleriyle sınırladığı hacmı hesaplayınız. Cevap : $\frac{abc}{6}$

86. $z=x^2+3y^2$ yüzeyi ile $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=3$ ve $z=0$ düzlemlerinin sınırladığı hacmı hesaplayınız. Cevap : 62

Aşağıdaki üç katlı integralleri hesaplayınız.

87. $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{\sqrt{x^2-y^2}} \frac{dx\,dy\,dz}{x^2-y^2+z^2}$ Cevap : $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$

88. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{yz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ Cevap : $\frac{1}{16}\pi a^4$

89. $\int_0^1\int_0^{\log x}\int_0^{x+y} e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$ Cevap : $-\frac{1}{8}(e^2-8e+15)$

90. $\int_0^1\int_0^{\pi/3}\int_0^{r^2\sin^2\theta} r^3\,dr\,d\theta\,dz$ Cevap : $\frac{\pi}{36}-\frac{\sqrt{3}}{48}$

91. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{a\sin\theta}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} \frac{r\,z\,d\theta\,dr\,dz}{(a^2-r^2+z^2)^{3/2}}$ Cevap : $a(2-\sqrt{2})$

92. $\int_0^{\pi/4}\int_1^{\cos\theta}\int_1^{r} \frac{d\theta\,dr\,dz}{r^2z^2}$ Cevap : $\frac{1}{8}(4+\pi)-\log(\sqrt{2}+1)$

93. $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\theta}\int_{a\sin\varphi}^{a} r\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$ Cevap : $\frac{a^2}{40}$

Aşağıdaki üç katlı integralleri yanlarında gösterilen R bölgesinde hesaplayınız.

94. $\iiint_R x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$ R : $0 \leqslant y \leqslant z \leqslant x \leqslant 2a$

Cevap : $\dfrac{4a^6}{3}$

95. $\iiint_R e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$ R : $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant z \leqslant x+y$

Cevap : $\dfrac{e^4-3}{8} + e - \dfrac{3e^2}{4}$

96. $\iiint_R x\,dx\,dy\,dz$ R : $x+z \leqslant 1$, $x \geqslant y^2$, y ve $z \geqslant 0$

Cevap : $\dfrac{4}{35}$

97. $x^2+y^2+z^2=5$ küresi ile $x^2+y^2=4z$ parapoloidinin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)$

98. $y^2+z^2=2x$ paraboloidinin $y=x-1$ düzlemi ile sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{9\pi}{4}$

99. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=0$, $z=12+y-x^2$ yüzeylerinin sınırladığı silindirik hacmı hesaplayınız.

Cevap : $4\,\dfrac{9}{140}$

100. $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ yüzeyinin sınırladığı toplam hacmı hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{4}{35}\pi a^3$

101. $z=4-x^2-y^2$ parabolidi ile $z=4-2x$ düzleminin sınırladığı hacmı hesaplayınız.

Cevap : $\dfrac{\pi}{2}$

16. KOMPLEKS SAYILAR

1. $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$ *ifadesini kısaltınız.*

$$\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}=\frac{i^4+(i^4)^2\,i+(i^4)^4}{2-i^4\,i+(i^4)^2\,i^2-(i^4)^3\,i^3}$$

$$=\frac{1+i+1}{2-i+i^2-i^3}$$

$$=\frac{2+i}{2-i-1+i}$$

$$=2+i$$

2. *Kompleks ifadesi $-10-10i$ olan vektörün 45° ve 90° döndürülmesi halinde elde edilen vektörlerin kompleks ifadelerini bulunuz.*

Bir vektörün 45° döndürülmesi halinde elde edilecek vektörün kompleks ifadesini bulmak için, verilen vektörün kompleks ifadesini $\cos 45° + i \sin 45°$ ile çarpmak kâfidir. Buna göre elde edilen vektörün kompleks ifadesi :

$$(-10-10i)(\cos 45°+i\sin 45°)=(-10-10i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=-5\sqrt{2}-5\sqrt{2}\,i-5\sqrt{2}\,i-5\sqrt{2}\,i^2$$

$$=-10\sqrt{2}\,i$$

dir.

Ayni vektörün 90° döndürülmesi halinde elde edilen vektörün kompleks ifadesi de verilen vektörün kompleks ifadesini :

$$\cos 90° + i \sin 90° = i$$

ile çarpmak suretile elde edilir. Buna göre elde edilen ifade :

$$(-10-10i)\,i = -10i - 10i^2$$
$$= 10 - 10i$$

dir.

3. $\dfrac{12(\cos 16^\circ + i \sin 16^\circ)}{[3(\cos 44^\circ + i \sin 44^\circ)][2(\cos 62^\circ + i \sin 62^\circ)]}$ *işlemini yapınız ve sonucu kartezyen olarak ifade ediniz.*

$$\frac{12(\cos 16^\circ + i \sin 16^\circ)}{[3(\cos 44^\circ + i \sin 44^\circ)][2(\cos 62^\circ + i \sin 62^\circ)]} = \frac{12(\cos 16^\circ + i \sin 16^\circ)}{6(\cos 106^\circ + i \sin 106^\circ)}$$
$$= 2[\cos(16^\circ - 106^\circ) + i \sin(16^\circ - 106^\circ)]$$
$$= 2[\cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ)]$$
$$= 2(\cos 90^\circ - i \sin 90^\circ)$$
$$= -2i$$

4. $\dfrac{[2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)]^7}{[4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^3}$ *işlemini yapınız.*

$$\frac{[2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)]^7}{[4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^3} = \frac{2^7(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)}{2^6(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)}$$
$$= 2[\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)]$$
$$= 2(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ)$$
$$= \sqrt{3} - i$$

5. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i\right)^{100}$ *işlemini yapınız.*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$$

olup:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)^{100} = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{100}$$

yazılarak ikinci taraftaki ifadeye Moivre formülü uygulanırsa:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i\right)^{100} = \cos 3000^\circ + i \sin 3000^\circ$$

$$= \cos 120° + i \sin 120°$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

elde edilir.

6. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{30}$ *işlemini yapınız.*

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° = \sin 45° \qquad \text{olup :}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = \cos 45° + i \sin 45°$$

yazılarak :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{30} = (\cos 45° + i \sin 45°)^{30}$$

$$= \cos 1350° + i \sin 1350°$$

$$= \cos 270° + i \sin 270_{°}$$

$$= -i$$

bulunur.

7. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ *işlemini yapınız.*

$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ ve $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ sayılarını trigonometrik şekilde yazmak üzere bu sayıların modül ve argümanlarını belirtelim. Buna göre :

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 1 \quad ; \quad \varphi_1 = 45°$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -1 \quad ; \quad \varphi_2 = 315°$$

olup :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \cos 45° + i \sin 45°$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10} = (\cos 45° + i \sin 45°)^{10}$$
$$= \cos 450° + i \sin 450°$$
$$= \cos 90° + i \sin 90°$$
$$= i$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}} = \cos 315° + i \sin 315°$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10} = (\cos 315° + i \sin 315°)^{10}$$
$$= \cos 3150° + i \sin 3150°$$
$$= \cos 270° + i \sin 270°$$
$$= -i$$

elde edilerek:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{10} = i + (-i) = 0$$

bulunur.

8. $\frac{256}{(1+i)^{14}}$ *işlemini yapınız.*

$$1 + i = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°)$$

ve

$$(1+i)^{14} = 2^7(\cos 630° + i \sin 630°)$$
$$= 2^7(\cos 270° + i \sin 270°)$$
$$= 2^7(-i)$$
$$= -128\,i$$

olup:

$$\frac{256}{(1+i)^{14}} = \frac{256}{-128\,i} = \frac{2}{-i} = 2i$$

dir.

9. $-\sqrt{3}+i$ *sayısının altıncı mertebeden kökünü hesaplayınız.*

$$r = \sqrt{3+1} = 2 \quad ; \qquad \text{tg}\,\varphi = \frac{1}{-\sqrt{3}} \quad , \qquad \varphi = 150°$$

ve $$-\sqrt{3}+i = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

olarak :

$$z = \sqrt[6]{-\sqrt{3}+i} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\frac{150^\circ + 360k}{6} + i \sin\frac{150^\circ + 360k}{6}\right]$$

$$= \sqrt[6]{2}\,[\cos(25^\circ + 60k) + i \sin(25^\circ + 60k)$$

dır. Buna göre :

$$z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ)$$
$$z_3 = \sqrt[6]{2}(\cos 145^\circ + i \sin 145^\circ)$$
$$z_4 = \sqrt[6]{2}(\cos 205^\circ + i \sin 205^\circ)$$
$$z_5 = \sqrt[6]{2}(\cos 265^\circ + i \sin 265^\circ)$$
$$z_6 = \sqrt[6]{2}(\cos 325^\circ + i \sin 325^\circ)$$

bulunur.

10. *$2-2\sqrt{3}\,i$ sayısının beşinci mertebeden kökünü hesaplayınız.*

$$r = \sqrt{4+12} = 4 \ ; \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\sqrt{3}}{2} \ \text{ve} \ \varphi = 300^\circ \ \text{olup:}$$

$$2-2\sqrt{3}\,i = 4(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

yazılâbilir. Buna göre :

$$z = \sqrt[5]{2-2\sqrt{3}\,i} = \sqrt[5]{4(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)}$$

$$z = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{360k+300}{5} + i \sin\frac{360k+300}{5}\right]$$

olarak :

$$z_1 = \sqrt[5]{4}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$
$$z_2 = \sqrt[5]{4}(\cos 132^\circ + i \sin 132^\circ)$$
$$z_3 = \sqrt[5]{4}(\cos 204^\circ + i \sin 204^\circ)$$
$$z_4 = \sqrt[5]{4}(\cos 276^\circ + i \sin 276^\circ)$$
$$z_5 = \sqrt[5]{4}(\cos 348^\circ + i \sin 348^\circ)$$

bulunur.

11. *$x^6+1=0$ denkleminin gerçel ve kompleks köklerini bulunuz.*

$$x=\sqrt[6]{-1}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{1/6}$$

$$x=\left[\cos\frac{2k\pi+\pi}{6}+i\sin\frac{2k\pi+\pi}{6}\right]$$

olup :

$$x_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$x_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$x_3=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$x_4=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$x_5=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

$$x_6=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

bulunur.

12. *$(3-7i)^{-3}$ ü $a+bi$ şekline sokunuz.*

$3-7i$ sayısı için $r=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-7}{3}=-2{,}3333$ ve $\varphi=293°12'$ olarak :

$$\begin{aligned}(3-7i)^{-3}&=58^{-\frac{3}{2}}(\cos 293°12'+i\sin 293°12')^{-3}\\&=0{,}002264[\cos(-879°36')+i\sin(-879°36')]\\&=0{,}002264[\cos 200°24'+i\sin 200°24']\\&=0{,}002264(-\cos 20°24'-i\sin 20°24')\\&=0{,}002264(-0{,}9373-0{,}3486\,i)\\&=-10^{-4}(21{,}21+7{,}894\,i)\end{aligned}$$

bulunur.

13. *$\dfrac{(5-4i)^{1/2}(3i-2)^{2/3}}{(-8-3i)^{2/5}}$ ifadesini $a+bi$ şekline sokunuz.*

$5-4i$ sayısı için $r=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$: $\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{-4}{5}$ ve

$\varphi = 321°20'$ olarak :

$$(5-4i)^{1/2} = 41^{1/4}(\cos 321°20' + i \sin 321°20')^{1/2}$$
$$= 41^{1/4}(\cos 160°40' + i \sin 160°40') \qquad \text{dır.}$$

$-2+3i$ sayısı için $\quad r=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$: $\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{-2}$ ve

$\varphi = 123°41'$ olarak :

$$(3i-2)^{2/3} = 13^{1/3}(\cos 123°41' + i \sin 123°41')^{2/3}$$
$$= 13^{1/3}(\cos 82°27' + i \sin 82°27')$$

dır.

$-8-3i$ sayısı için de $\quad r=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}$, $\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{-3}{-8}$

$= 0{,}375$ ve $\varphi = 200°32'$ olarak :

$$(-8-3i)^{2/5} = 73^{1/5}(\cos 200°32' + i \sin 200°32')^{2/5}$$
$$= 73^{1/5}(\cos 80°13' + i \sin 80°13')$$

dır. Bunlara göre :

$$\frac{(5-4i)^{1/2}(3i-2)^{2/3}}{(-8-3i)^{2/5}} =$$

$$\frac{41^{1/4}\times 13^{1/3}}{73^{1/5}}\left[\frac{(\cos 160°\,40'+i \sin 160°\,40')(\cos 82°\,27'+i \sin 82°27')}{(\cos 80°13'+i \sin 80°\,13']}\right]$$

$$= 2{,}523\,\frac{\cos 243°7'+i \sin 243°\,7'}{\cos 80°13'+i \sin 80°13'}$$
$$= 2{,}523(\cos 162°54' + i \sin 162°54')$$
$$= 2{,}523(-\cos 17°6' + i \sin 17°6')$$
$$= 2{,}523(-0{,}9558 + 0{,}2940\, i)$$
$$= -2{,}411 + 0{,}7415\, i\ .$$

bulunur.

14. $\quad S_1 = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$

$S_2 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$

toplamlarını $S_1 + i\,S_2$ yi teşkil ederek hesaplayınız.

$$S_1+i\,S_2=(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+(\cos 3x+i\sin 3x)+..$$
$$=(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^2+(\cos x+i\sin x)^3+..$$
$$=(\cos x+i\sin)\frac{1-(\cos x+i\sin x)^n}{1-(\cos x+i\sin x)}$$
$$=\frac{\cos x+i\sin x-(\cos x+i\sin x)^{n+1}}{(1-\cos x)-i\sin x}$$
$$=\frac{\cos x+i\sin x-\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x}{(1-\cos x)-i\sin x}$$
$$=\frac{[(1-\cos x)+i\sin x][\cos x+i\sin x-\cos(n+1)x-i\sin(n+1)x}{(1-\cos x)^2-i^2\sin^2 x}$$
$$=\frac{[(1-\cos x)+i\sin x][\cos x-\cos(n+1)x+i\sin x-i\sin(n+1)x]}{2(1-\cos x)}$$
$$=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x+\cos x-1}{2(1-\cos x)}+i\,\frac{\sin nx-\sin(n+1)x+\sin x}{2(1-\cos x)}$$

olup

$$S_1=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x+\cos x-1}{2(1-\cos x)}$$
$$S_2=\frac{\sin nx-\sin(n+1)x+\sin x}{2(1-\cos x)}$$

dir.

15. $S_1=1+\frac{i}{2}+\frac{i^2}{4}+\frac{i^3}{8}+\ldots$

$S_2=1-\frac{i}{2}+\frac{i^2}{4}-\frac{i^3}{8}+\ldots$

toplamlarını hesaplayınız.

$$S_1+S_2=2+2\frac{i^2}{4}+2\frac{i^4}{16}+\ldots$$
$$=2\left[1+\frac{i^2}{2^2}+\frac{i^4}{2^4}+\ldots\right]$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\ldots\right)$$
$$=2\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{2}{1+\frac{1}{4}}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{8}{5}$$

ve

$$S_1 - S_2 = 2\left[\frac{i}{2} + \frac{i^3}{2^3} + \frac{i^5}{2^5} + \dots\right]$$

$$= i\left(1 + \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2^4} - \dots\right)$$

$$S_1 - S_2 = \frac{4}{5}\, i$$

bulunur. Bunlardan ise :

$$S_1 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} i \quad ; \quad S_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} i$$

elde edilir.

Aşağıdaki işlemleri yapınız :

16. $(4 - 3i) + (2i - 8)$ Cevap : $-4 - i$

17. $(3 + 2i)(2 - i)$ Cevap ; $8 + i$

18. $\dfrac{2 - 3i}{4 - i}$ Cevap : $\dfrac{11}{17} - \dfrac{10}{17} i$

19. $(4 + i)(3 + 2i)(1 - i)$ Cevap : $21 + i$

20. $\dfrac{(2 + i)(3 - 2i)(1 + 2i)}{(1 - i)^2}$ Cevap : $-\dfrac{15}{2} + 5i$

21. $(2i - 1)^2 \left[\dfrac{4}{1-i} - \dfrac{2-i}{1+i}\right]$ Cevap : $-\dfrac{11}{2} - \dfrac{23}{2} i$

22. $3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$ Cevap : $-3 - 2i$

23. $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -2 + 4i$: $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ olduğuna göre aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $z_1^2 + 2z_1 - 5$ Cevap : $-1 - 4i$

b) $|2z_2 - 3z_1|^2$ Cevap ; 170

c) $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$ Cevap : $\dfrac{3}{5}$

d) $(2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2)$ nin reel kısmı Cevap ; -35

24. $2x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i = (x + y + 2) - (y - x + 3)i$ eşitliğini sağlıyan x ve y değerlerini bulunuz.

Cevap : $x = 1.$ $y = 2$

Aşağıdaki kompleks sayıları kartezyen şekle sokunuz.

25. $6(\cos 135° + i \sin 135°)$ Cevap : $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\, i$

26. $4(\cos 315° + i \sin 315°)$ Cevap : $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\, i$

27. $2e^{\frac{5\pi}{4}i}$ Cevap : $-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$

28. $3e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ Cevap : $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\,i$

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

29. $6(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ).3(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)$ Cevap : $9\sqrt{2}+9\sqrt{2}\,i$

30. $(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ).3(\cos 123^\circ + i\sin 123^\circ).4(\cos 159^\circ + i\sin 159^\circ)$ Cevap : $6-6\sqrt{3}\,i$

31. $\frac{12(\cos 232^\circ + i\sin 232^\circ)}{3(\cos 82^\circ + i\sin 82^\circ)}$ Cevap : $-2\sqrt{3}+2i$

32. $\frac{8(\cos 73^\circ + i\sin 73^\circ)}{2(\cos 118^\circ + i\sin 118^\circ)}$ Cevap : $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$

33. $[2(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)]^6$ Cevap : $32-32\sqrt{3}\,i$

34. $\frac{[8(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)]^3}{[2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)]^4}$ Cevap : $-16-16\sqrt{3}\,i$

35. $\frac{\left(4e^{\frac{\pi}{6}i}\right)\left(2e^{\frac{-5\pi}{4}i}\right)\left(6e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)}{\left(4e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2}$ Cevap: $-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$

36. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$ Cevap : $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i$

37. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i\right)^{27}$ Cevap : i

Aşağıdaki kökleri hesaplayınız :

38. $(2\sqrt{3}-2i)^{1/2}$

39. $(-4+4i)^{1/5}$

40. $(2+2\sqrt{3}\,i)^{1/3}$

41. $(-16\,i)^{1/4}$

42. $(-i)^{1/3}$

43. $\sqrt{\frac{5+6i}{8+3i}}$ Cevap : $-(0{,}7796+0{,}5527\,i)$

44. $\frac{(5-4i)^{1/2}}{(2+5i)^{1/3}}$ Cevap : $-1{,}072+0{,}9674\,i$

45. $\frac{(5-7i)^{4/5}}{(2+7i)^{1/3}(3i-4)^{1/2}}$ Cevap : $-1{,}096+0{,}6805\,i$

46. $\frac{(2+5i)^{1/2}(-4-9i)^{2/3}}{(8i-3)^{4/5}}$ Cevap : $-0{,}6457+1{,}805\,i$

BİBLİYOGRAFYA

AUBERT, P. - PAPELIER, G.	*Exercises d'Algèbre d'Analyse et de Trigonometrie*
AYRES, Frank Jr.	*Theory and Problems of Differential and Integral*
AYRES, Frank Jr.	*Theory and Problems of Differential Equations*
BACON, Harold Maile	*Differential and Integral Calculus*
BURINGTON, Richard Stevens	*Handbook of Mathematical Tables and Formulas*
CASANOVA, G.	*Cours de Mathematiques*
DALAKER, Hans H. - HORTING, Henry E.	*The Calculus*
DİLGAN, Hamit	*Analiz II*
FORD, Lester R., Sr. - FORD, Lester R., Jr.	*Calculus*
GRANVILLE, W. A. - SMITH, F.	*Eléments de Calcul Différentel et Integral*
ILIOVICI, G.- SAINTE-LAUGE, A.	*Cours d'Algèbre et d'Analyse*
KELLS, Lyman M.	*Calculus*
LABOUREUR, Maurice	*Cours d'exercices sur le Calcul Mathématique*
LEIB, D. - SALLİN, A.	*Exercices Methodiques de Calcul Differentiel et Integral*
MANN, H. Leslie	*Practical Mathematics*
MARTIN, J.	*Caurs de Mathématiques*
MILHAUD, G. - POUGET, E.	*Cours de Géometrie Analytique*
PAPELIER, G.	*Précis de Géometrie Analytique*
Par une Réunion de Professeurs	*Exercices d'Algébre*
POUSSIN, C. J. Della Wallé - BERKER, Ratıp	*Analiz Dersleri*
PROTTER, Murray H. - MORREY, C. B. Jr.	*Modern Mathematical Analysis*
QUINET. J	*Cours élémentaire de Mathématiques Supérieures*
ROTHE, R.	*Höhere Mathematik*

SMITH, Edward S. - SALKOVER, Meyer - JUSTICE, Howard, K. — *Unified Calculus*

SPIGEL, Murray R. — *Theory and Problems of Advanced Calculus*

SPIGEL, Murray R. — *Theory and Problems of Complex Variables*

STOCK, Robert — *Cours d'Algèbre*

VESSIOT, Ernest - MONTEL, Paul — *Cours de Mathématiques Générales*

VOGT, H. — *Solutions des exercices proposés dans les éléments de Mathématiques Superieures*

WOODS - BAILEY - SALLIN, A. — *Mathématiques Générales*